

Tentamen i Sannolikhetssteori II 12 augusti 2025

Examinator: Mia Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Tabell över sannolikhetsfördelningar som delas ut vid tentamenstillfället. Miniräknare är ej tillåtna.

Återlämning: Resultat läggs in i ladok senast 26 augusti.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Tentamen är indelad i en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 30 poäng vardera. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen. Nedanstående gränser gäller för de olika betygsstegen. Resonemang ska vara klara och tydliga.

	Betyg				
	A	B	C	D	E
Basdel	20	20	20	20	20
Betygsgrundande del	25	19	13	7	0

Basdel

Uppgift 1

Den tvådimensionella stokastiska variabeln $(X,Y)'$ har tätheten

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{för } x,y > 0, x+y \leq 1; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- a) Bestäm $\mathbb{P}(X \leq 0.8 | Y \leq 0.2)$.
- b) Är X och Y oberoende? Svaret måste motiveras.
- c) Bestäm den betingade fördelningen för X givet att $Y = y$, för $y \in (0,1)$.

Uppgift 2

Låt X vara en stokastisk variabel med $\mathbb{P}(X = 2) = p$ och $\mathbb{P}(X = -2) = 1 - p$.

- a) Ange den sannolikhetsgenererande funktionen för X .
- b) Ange den sannolikhetsgenererande funktionen för $-X$.

- c) Låt X_1 och X_2 vara två oberoende lika fördelade stokastiska variabler med samma fördelning som X . Ange den sannolikhetsgenererande funktionen för $X_1 - X_2$.
- d) Bestäm sannolikhetsfunktionen för $X_1 - X_2$ (till exempel genom att använda svaret i c)).

Uppgift 3

Låt X_1 , X_2 och X_3 vara oberoende $N(0,1)$ -, $N(1,2)$ - respektive $N(2,3)$ -fördelade stokastiska variabler. Sätt $Y_1 = X_2 - X_1$ och $Y_2 = X_3 - X_1$.

- a) Bestäm fördelningen för $(Y_1, Y_2)'$.
- b) Ange $\mathbb{E}[Y_1 + Y_2]$ och $\text{Var}(Y_1 + Y_2)$.

Betygsgrundande del

Uppgift 4

Antag att X och Y är oberoende slumpvariabler, med $X \sim \beta(a, b)$ och $Y \sim \Gamma(c, 1)$. Sätt $U = XY$ och $V = (1 - X)Y$.

- a) Bestäm den simultana täthetsfunktionen för $(U, V)'$.
- b) Hur ska a , b och c vara relaterade för att U och V ska vara oberoende och vilka fördelningar har U och V i så fall?

Uppgift 5

Den stokastiska variabeln X är Poissonfördelad med slumpmässig parameter M , det vill säga $X|M = m \sim \text{Po}(m)$. Parametern M är exponentialfördelad med väntevärde 1.

- a) Bestäm (den obetingade) fördelningen för X .
- b) Bestäm den betingade fördelningen för M givet att $X = k$.

Uppgift 6

Med start i 0 slumpvandrar en partikel på tallinjens heltalspunkter. Vid varje tidpunkt $1, 2, 3, \dots$ tar partikeln ett steg till höger eller ett steg till vänster med lika sannolikhet, eller så stannar den kvar med sannolikheten $p \in (0, 1)$. Låt N_1 respektive N_2 vara de tidpunkter då partikeln stannar kvar för första respektive andra gången.

- a) Hur är de stokastiska variablerna N_1 och $N_2 - N_1$ fördelade?
- b) Visa att pN_1 konvergerar i fördelning då $p \rightarrow 0$ och ange gränsfördelningen.
- c) Visa att pN_2 konvergerar i fördelning då $p \rightarrow 0$ och ange gränsfördelningen.

Lycka till!