

Lösningar Sannolikhetsteori II

12 augusti 2025

Uppgift 1

a) Enligt definitionen av betingad sannolikhet gäller att

$$\mathbb{P}(X \leq 0.8 | Y \leq 0.2) = \frac{\mathbb{P}(X \leq 0.8, Y \leq 0.2)}{\mathbb{P}(Y \leq 0.2)}.$$

Täljaren blir

$$\mathbb{P}(X \leq 0.8, Y \leq 0.2) = \int_0^{0.8} \int_0^{0.2} 2 dx dy = 2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.32.$$

Den marginella tätheten för Y är

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = 2 \int_0^{1-y} dx = 2(1-y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

vilket ger $\mathbb{P}(Y \leq 0.2) = \int_0^{0.2} f_Y(y) dy = 0.36$. Alltså fås att $\mathbb{P}(X \leq 0.8 | Y \leq 0.2) = 0.32/0.36 = 0.89$.

b) Pga symmetri är den marginella tätheten för X densamma som för Y , dvs $f_X(x) = 2(1-x)$ för $0 \leq x \leq 1$. För att X och Y ska vara oberoende ska gälla att $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla x,y . Vi har tex att $f_{X,Y}(0.5,0.5) = 2 \neq 1 = f_X(0.5)f_Y(0.5)$ och alltså är X och Y inte oberoende.

c) Enligt definitionen av betingad täthet gäller att

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}, \quad 0 \leq x \leq 1-y.$$

Det betyder att $X|Y=y \sim U(0, 1-y)$.

Uppgift 2

Här skulle det ha stått momentgenererande funktion istället för sannolikhetgenererande funktion (eftersom det av flera skäl är olämpligt att arbeta med sannolikhetsgenererande funktion för variabler som kan anta negativa värden), men uppgiften är lösbar enligt följande:

a) $g_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = pt^2 + (1-p)t^{-2}$.

b) $g_{-X}(t) = \mathbb{E}[t^{-X}] = pt^{-2} + (1-p)t^2$.

c) $g_{X_1-X_2}(t) = \mathbb{E}[t^{X_1-X_2}] \stackrel{\text{ober.}}{=} \mathbb{E}[t^{X_1}]\mathbb{E}[t^{-X_2}] = p + (1-p) + p(1-p)t^4 + p(1-p)t^{-4}$.

d) Genom att identifiera koefficienter i c) (där koefficienten framför t^k anger $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = k)$) får vi $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = 4) = \mathbb{P}(X_1 - X_2 = -4) = p(1-p)$ och $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = 0) = p + (1-p)$.

Uppgift 3

a) Eftersom X_1, X_2 och X_3 är oberoende och normalfördelade så är $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, X_3)$ multivariat normalfördelat med

$$\mu = \mathbb{E}[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{\Lambda} = \text{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi har att $\mathbf{Y} = B\mathbf{X}$, där $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, och enligt sats gäller då att $\mathbf{Y} \sim N(B\mu, B\mathbf{\Lambda}B')$, där

$$B\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B\mathbf{\Lambda}B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Vi har $\mathbf{E}[Y_1 + Y_2] = \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] = 1 + 2 = 3$ och $\text{Var}(Y_1 + Y_2) = \text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) + 2\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 3 + 4 + 2 = 9$.

Uppgift 4

Enligt formelsamlingen har vi $f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $0 < x < 1$, och $f_Y(y) = \frac{y^{c-1}}{\Gamma(c)e^{-y}}$, $y > 0$. Invertering av $u = xy$ och $v = (1-x)y$ ger $x = u/(u+v)$ och $y = u+v$. Vidare gäller att $0 < x < 1$ och $y > 0$ är ekvivalent med att $u > 0$ och $v > 0$. Funktionaldeterminanten för transformationen blir

$$J = \begin{vmatrix} \frac{v}{(u+v)^2} & -\frac{u}{(u+v)^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{u+v}.$$

Eftersom X och Y är oberoende gäller enligt transformationssatsen att

$$f_{U,V}(u,v) = f_X(u/(u+v))f_Y(u+v)|J| = \frac{u^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-u}\frac{v^{b-1}}{\Gamma(b)}e^{-v}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(c)}(u+v)^{c-a-b}, u,v > 0.$$

b) Variablerna U och V är oberoende om $f_{U,V}(u,v) = g(u)h(v)$, dvs om $a+b=c$. Då gäller att $U \sim \Gamma(a,1)$ och $V \sim \Gamma(b,1)$.

Uppgift 5

a) Med hjälp av lagen om total sannolikhet fås

$$\mathbb{P}(X = k) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X = k|M = m)f_M(m)dm = \int_0^\infty e^{-m} \frac{m^k}{k!} e^{-m} = \int_0^\infty \frac{1}{k!} m^k e^{-2m}.$$

Multipliserar vi med 2^{k+1} så är integranden en gammatäthet och integrerar sig till 1. Det följer att

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

dvs $X \sim \text{Ge}(1/2)$.

b) Med hjälp av Bayes sats får vi att

$$f_{M|X=k}(m) = \frac{\mathbb{P}(X = k|M = m)f_M(m)}{\mathbb{P}(X = k)} = c \cdot m^k e^{-2m},$$

dvs $M|X = k \sim \Gamma(k + 1, 1/2)$.

Uppgift 6

a) Antalet tidssteg N_1 tills partikeln stannar kvar för första gången är ffg-fördelat med parameter p , och detsamma gäller för antalet tidssteg $N_2 - N_1$ mellan det första och det andra stoppet, dvs

$$\mathbb{P}(N_1 = n) = \mathbb{P}(N_2 - N_1 = n) = (1 - p)^{n-1}p, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Från formelsamlingen fås att $\psi_{N_1}(t) = \mathbb{E}[e^{tN_1}] = pe^t / (1 - (1 - p)e^t)$ och vi har att

$$\psi_{pN_1}(t) = \mathbb{E}[e^{tpN_1}] = \psi_{N_1}(tp) = \frac{pe^{tp}}{1 - (1 - p)e^{tp}} = \frac{p(1 - o(p))}{1 - (1 - p)(1 + tp - o(p^2))} \rightarrow \frac{1}{1 - t}.$$

Gränsvärdet känns igen som den momentgenererande funktionen för en $\text{Exp}(1)$ -variabel, och det följer från kontinuitetssatsen för genererande funktioner att $pN_1 \xrightarrow{d} \text{Exp}(1)$.

c) Eftersom partikelns förflyttningar är oberoende, så är N_1 och $N_2 - N_1$ oberoende, och det följer att

$$\psi_{pN_2}(t) = \mathbb{E}[e^{tpN_2}] = \mathbb{E}[tp(N_1 + N_2 - N_1)] = \mathbb{E}[e^{tpN_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{tp(N_2 - N_1)}] \rightarrow \frac{1}{(1 - t)^2}.$$

Gränsvärdet känns igen som den momentgenererande funktionen för en $\Gamma(2, 1)$ -variabel, och det följer från kontinuitetssatsen för genererande funktioner att $pN_2 \xrightarrow{d} \Gamma(2, 1)$.