

Tentamen i Sannolikhetssteori II, 5 juni 2026

Examinator: Mia Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Tabell över sannolikhetsfördelningar som delas ut vid tentamenstillfället. Miniräknare är ej tillåtna.

Återlämning: Resultat läggs in i ladok senast 18 juni.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Tentamen är indelad i en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 30 poäng vardera. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen. Nedanstående gränser gäller för de olika betygsstegen. Resonemang ska vara klara och tydliga.

	Betyg				
	A	B	C	D	E
Basdel	20	20	20	20	20
Betygsgrundande del	25	19	13	7	0

Basdel

Uppgift 1

Låt $(X,Y)'$ vara en kontinuerlig slumpvektor med täthet

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{för } x \geq 0, 0 \leq y \leq 2; \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

- a) Ange marginalfördelningarna för X och Y .
- c) Är X och Y oberoende? Motivera.
- b) Bestäm den momentgenererande funktionen för $X + Y$.

Uppgift 2

Låt $(X_1, X_2)'$ vara multivariat normalfördelad med $\mathbb{E}[X_1] = 2$, $\mathbb{E}[X_2] = 3$, $\text{Var}(X_1) = 4$, $\text{Var}(X_2) = 9$ och $\text{Cov}(X_1, X_2) = a$. Låt $Y_1 = X_1$ och $Y_2 = X_1 + X_2$.

- a) Vilken fördelning har $(Y_1, Y_2)'$?
- b) För vilket/vilka värden på a är Y_1 och Y_2 oberoende?
- c) Bestäm $\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > 7)$.

Uppgift 3

a) Definiera begreppen konvergens i fördelning ($\xrightarrow{d}$) och konvergens i sannolikhet ($\xrightarrow{p}$) för en följd av stokastiska variabler.

b) Kasta ett symmetriskt mynt och låt $X = 1$ om det blir krona och $X = 0$ om det blir klave. Låt $X_1, X_2, \dots$ vara en följd stokastiska variabler där

$$X_k = \begin{cases} X & \text{om } k \text{ är jämnt;} \\ 1 - X & \text{om } k \text{ är udda.} \end{cases}$$

Visa att $X_k \xrightarrow{d} X$ men $X_k \not\xrightarrow{p} X$ då $k \rightarrow \infty$.

Betygsgrundande del**Uppgift 4**

Låt $(X_1, X_2, X_3)'$ vara multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor $\mu = (1, 1, 0)'$ och kovariansmatris

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm den betingade fördelningen för $X_1 + 2X_2$ givet att $X_2 - X_3 = 1$.

Uppgift 5

Låt $(X, Y)'$ vara en kontinuerlig slumpvektor med täthet

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x-xy} & \text{för } x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

Bestäm fördelningen för $X(1 + Y)$.

Uppgift 6

En smittsam epidemi utvecklas i en population på följande sätt: Under epidemins första dag finns det i populationen endast en smittsam person som i sin tur sprider smittan vidare till N personer, där $N \sim \text{Ge}(p)$. Den andra dagen av epidemin har den första personen tillfrisknat medan de N nysmittade i sin tur oberoende av varandra (och oberoende av epidemins förlopp under den första dagen) smittar nya personer på samma sätt som den första personen gjorde. Låt Y vara antalet personer som blir smittade under epidemins andra dag.

- a) Bestäm den sannolikhetsgenererande funktionen för Y .
- b) Bestäm sannolikhetsfunktionen för Y .
- c) Bestäm väntevärde för Y .