

Lösningar Sannolikhetssteori II

5 juni 2026

Uppgift 1

a) Vi har $f_X(x) = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-x} dy = e^{-x}$ för $x > 0$ och $f_Y(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{2}$ för $y \in [0, 2]$. Alltså är $X \sim \text{Exp}(1)$ och $Y \sim U(0, 2)$.

b) Eftersom $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla x,y så är X och Y oberoende.

c) Från formelsamlingen (eller med hjälp av enkla härledningar) får vi att $\Psi_X(t) = \frac{1}{1-t}$ för $|t| < 1$ och $\Psi_Y(t) = \frac{e^{2t}-1}{2t}$ för $t \neq 0$ (och $\Psi_Y(0) = 1$). Eftersom X och Y är oberoende får vi sen att $\Psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t)\Psi_Y(t) = \frac{e^{2t}-1}{2t(1-t)}$ för $|t| < 1$, $t \neq 0$ (och $\Psi_{X+Y}(0) = 1$).

Uppgift 2

a) Vi har att $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor $\mu_x = (2, 3)'$ och kovariansmatris $\Lambda_x = \begin{bmatrix} 4 & a \\ a & 9 \end{bmatrix}$. Eftersom $\mathbf{Y} = B\mathbf{X}$, där $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, så gäller att $\mathbf{Y}$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor $\mu_y = B\mu_x = (2, 5)'$ och kovariansmatris $\Lambda_y = B\Lambda_x B' = \begin{bmatrix} 4 & 4+a \\ 4+a & 13+2a \end{bmatrix}$.

b) I en multivariat normalvektor gäller att komponenter är oberoende om de är okorrelerade. Vi har att $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 4 + a$ och alltså är Y_1 och Y_2 oberoende om $a = -4$.

c) $Y_1 + Y_2$ är normalfördelad med väntevärde 7 och alltså är $\mathbb{P}(Y_1 - Y_2 > 7) = 1/2$.

Uppgift 3

a) Se Gut s.147.

b) Vi har att $X \stackrel{d}{=} 1 - X$ och alltså gäller att $F_{X_k}(x) = F_X(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$, dvs $X_k \xrightarrow{d} X$. Dock gäller att $\mathbb{P}(|X_k - X| = 1) = 1$ om k är udda, dvs $X_k \not\xrightarrow{p} X$.

Uppgift 4

Låt $Y_1 = X_1 + 2X_2$ och $Y_2 = X_2 - X_3 - 1$. Med $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ har vi då att $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} - (0, 1)'$ och alltså är $\mathbf{Y}$ multivariat normalfördelad med $\mu_y = (3, 0)'$ och $\Lambda_y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Vi söker den betingade fördelningen för Y_1 givet att $Y_2 = 0$. Den betingade täthetsfunktionen för Y_1 givet att $Y_2 = 0$ ges av

$$f_{Y_1|Y_2=0}(y) = \frac{f_{Y_1, Y_2}(y, 0)}{f_{Y_2}(0)} = c \cdot f_{Y_1, Y_2}(y, 0).$$

Invertering ger $\Lambda_y^{-1} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ och den sökta tätheten ges sen av

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y, 0) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Lambda_y}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y-3, 0)\Lambda_y^{-1}(y-3, 0)'\right\} \\ &= c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y-3)^2}{23/4}\right\} \end{aligned}$$

Vi har alltså att $Y_1|Y_2=0 \sim N(3, 23/4)$.

Uppgift 5

Sätt $U = X(1+Y)$ och $V = X$. Invertering ger $Y = \frac{U}{V} - 1$. Vidare gäller att $x > 0$ och $y > 0$ är ekvivalent med att $0 < v < u$. Funktionaldeterminanten för transformationen blir

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{v},$$

och transformationssatsen ger att

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\left(v, \frac{u}{v} - 1\right) |J| = e^{-u}, 0 < v < u.$$

Vi söker marginalfördelningen för U som ges av

$$f_U(u) = \int_0^u v e^{-u} dv = u e^{-u} \text{ för } u > 0,$$

dvs $U \sim \Gamma(2, 1)$.

Uppgift 6

a) Låt X_i beteckna antalet nysmittade som person nummer i av de som smittades första dagen ger upphov till. Vi har då att $X_i \sim \text{Ge}(p)$ och $Y = \sum_{i=1}^N X_i$. Eftersom $N, X_1, X_2, \dots$ är oberoende får vi (enligt Theorem 5.1 s.82 i Gut) att

$$g_Y(t) = g_N(g_X(t)) = g_N\left(\frac{p}{1-qt}\right) = \frac{p}{1-q\frac{p}{1-qt}} = \frac{p(1-qt)}{1-pq-qt}.$$

b) Vi har att $P(Y = n) = g_Y^{(n)}(0)/n!$, där $g_Y^{(n)}$ betecknar n :te derivatan av g_Y (se Gut s.63). För $n = 0$ får vi direkt att $P(Y = 0) = g_Y(0) = p/(1 - pq)$. Derivering och förenkling ger

$$g_Y'(t) = \frac{p^2 q^2}{(1 - qp - qt)^2} \quad g_Y''(t) = \frac{2p^2 q^3}{(1 - qp - qt)^3},$$

och allmänt

$$g_Y^{(n)}(t) = \frac{n! p^2 q^{n+1}}{(1 - qp - qt)^{n+1}}.$$

Vi får alltså

$$P(Y = n) = p^2 \left(\frac{q}{1 - qp} \right)^{n+1} \quad \text{för } n = 1, 2, \dots$$

c) Vi har att $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[N]\mathbf{E}[X] = \left(\frac{q}{p}\right)^2$ (vilket även kan fås genom $g_Y'(1)$).