

Tentamen i Sannolikhetssteori II

17 augusti 2026

Examinator: Mia Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Tabell över sannolikhetsfördelningar som delas ut vid tentamenstillfället. Miniräknare är ej tillåtna.

Återlämning: Resultat läggs in i ladok senast 31 augusti.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Tentamen är indelad i en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 30 poäng vardera. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen. Nedanstående gränser gäller för de olika betygsstegen. Resonemang ska vara klara och tydliga.

	Betyg				
	A	B	C	D	E
Basdel	20	20	20	20	20
Betygsgrundande del	25	19	13	7	0

Basdel

Uppgift 1

Låt $(X,Y)'$ vara en kontinuerlig slumpvektor med simultan täthet

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x/y} & \text{för } x \geq 0 \text{ och } 0 < y \leq 1; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- Bestäm den marginella tätheten för Y .
- Bestäm den betingade fördelningen för X givet att $Y = y$, för $0 < y \leq 1$. Fördelningen har ett namn – vilket?
- Ange $\mathbb{E}[X|Y = y]$.
- Bestäm $\mathbb{E}[X]$.

Uppgift 2

Låt X_1 , X_2 och X_3 vara oberoende och normalfördelade med $\mathbb{E}[X_i] = \text{Var}(X_i) = i$ för $i = 1, 2, 3$.

- a) Vilken fördelning har vektorn $(X_1, X_2, X_3)'$?
- b) Låt $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3 - 4$ och $Y_2 = X_1 - X_2 + X_3$. Vilken fördelning har vektorn $(Y_1, Y_2)'$?
- c) Vad är den betingade fördelningen för Y_1 givet att $Y_2 = 0$?

Uppgift 3

Den stokastiska variabeln X antar värdet 2 med sannolikhet 0.5 och värdet -2 med sannolikhet 0.5.

- a) Ange den momentgenererande funktionen för X .
- b) Bestäm $\mathbb{E}[X^2]$ med hjälp av den momentgenererande funktionen. Kontrollera ditt svar med hjälp av den givna fördelningen för X .
- c) Låt Y vara en stokastisk variabel som är oberoende av X och har samma fördelning som X . Ange de momentgenererande funktionerna för $X + Y$ och $X - Y$.

Betygsgrundande del

Uppgift 4

Antalet kunder som handlar i en viss elektronikaffär under en dag är Poissonfördelat med väntevärde 40, och varje kund handlar för ett belopp som är exponentialfördelat med väntevärde 1000 kronor. Alla belopp är oberoende av varandra och också oberoende av antalet kunder.

- a) Beräkna väntevärde och varians för affärens totala inkomst under en dag.
- b) Låt N vara antalet kunder under en dag som handlar för mer än 2000 kronor. Härled fördelningen för N genom att bestämma den sannolikhetsgenererande funktionen för N .

Uppgift 5

Låt X och $Y_1, Y_2, \dots$ vara oberoende stokastiska variabler som alla är $\text{Exp}(1)$ -fördelade. Definiera $M = \inf\{n : Y_n > X\}$, dvs M anger antalet Y -värden som vi behöver observera för att få ett värde som är större än X -värdet.

- a) Om vi betingar på att $X = x$, vilken fördelning har då M ?
- b) Bestäm fördelningen för M , dvs bestäm $\mathbb{P}(M = m)$ för $m = 1, 2, \dots$

Ledning: Variabelsubstitutionen $e^{-x} = y$ kan eventuellt vara till hjälp.

Uppgift 6

Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende $U(0,1)$ -variabler och definiera

$$W_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \min_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

Konvergerar W_n i sannolikhets och/eller i fördelning då $n \rightarrow \infty$? Bevisa ditt påstående och bestäm de gränser som existerar.

Lycka till!