

Lösningar Sannolikhetssteori II

17 augusti 2026

Uppgift 1

- a) $f_Y(y) = 2 \int_0^\infty e^{-x/y} dx = 2y$ för $0 < y \leq 1$.
- b) $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y} e^{-x/y}$. Alltså gäller att $X|Y = y \sim \text{Exp}(y)$ (med parametrisering enligt Gut).
- c) Väntevärdet i en $\text{Exp}(y)$ fördelning är y , så $\mathbf{E}[X|Y = y] = y$.
- d) $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|Y]] = \mathbf{E}[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$.

Uppgift 2

- a) Vi har att $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor $\mu_x = (1, 2, 3)'$ och kovariansmatris $\Lambda_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- b) Eftersom $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} + \mathbf{b}$, där $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, och $\mathbf{b} = (-4, 0)'$ så gäller att $\mathbf{Y}$ är multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor $\mu_y = B\mu_x + \mathbf{b} = (2, 2)'$ och kovariansmatris $\Lambda_y = B\Lambda_x B' = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.
- c) Betingade fördelningar i en multivariat normalfördelning är normalfördelade och vi har att $\mathbf{E}[Y_1|Y_2 = 0] = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(0 - \mu_2) = 2 + \frac{2}{6}(0 - 2) = \frac{4}{3}$ och $\text{Var}(Y_1|Y_2 = 0) = \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}} = 6 - \frac{2^2}{6} = \frac{16}{3}$. Alltså gäller att $Y_1|Y_2 = 0 \sim N\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right)$.

Uppgift 3

- a) $\psi_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}] = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$.

b) Det gäller att $\mathbf{E}[X^n] = \psi_X^{(n)}(0)$. Vi har $\psi''(t) = 2(e^{2t} + e^{-2t})$ och alltså $\mathbf{E}[X^2] = \psi''(0) = 4$. Kontroll ger $\mathbf{E}[X^2] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

c) Vi har $\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t)\psi_Y(t) = \frac{(e^{2t}+e^{-2t})^2}{4}$ och $\psi_{X-Y}(t) = \psi_X(t)\psi_Y(-t) = \frac{(e^{2t}+e^{-2t})^2}{4}$.

Uppgift 4

a) Låt K vara antalet kunder under dagen och låt X_i vara beloppet som den i :te kunden handlar för. Den totala inkomsten ges då av $S_K = \sum_{i=1}^K X_i$. Eftersom $\{X_i\}$ är oberoende och även oberoende av K så får vi att

$$\mathbf{E}[S_K] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[K] = 1000 \cdot 40 = 40000 \text{ kr}$$

och

$$\text{Var}(S_K) = \mathbf{E}[K]\text{Var}(X) + \mathbf{E}[X]^2\text{Var}(K) = 40 \cdot 10^6 + 10^6 \cdot 40 = 8 \cdot 10^7 \text{ kr}^2.$$

b) Låt

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{om } X_i > 2000; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Då gäller att $Y_i \sim \text{Be}(p)$, där $p = P(X_i > 2000) = e^{-2}$ och $N = \sum_{i=1}^K Y_i$. De sannolikhetsgenererande funktionerna för Y_i och K ges av $g_Y(t) = q + pt$ och $g_K(t) = e^{40(t-1)}$, och den sannolikhetsgenererande funktionen för N blir då

$$g_N(t) = g_K(g_Y(t)) = e^{40p(t-1)}.$$

Detta känns igen som den sannolikhetsgenererande funktionen för en Poissonfördelad stokastisk variabel med parameter $40p = 40e^{-2}$ och från unicitet hos genererande funktioner följer att $N \sim \text{Po}(40e^{-2})$.

Uppgift 5

a) Givet att $X = x$ så är M Fs-fördelad med $p = \mathbb{P}(Y_i > x) = e^{-x}$, dvs $\mathbb{P}(M = m | X = x) = (1 - e^{-x})e^{-x}$.

b) Med hjälp av lagen om total sannolikhet får vi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = m) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(M = m | X = x) f_X(x) dx = \int_0^1 (1 - e^{-x})^{m-1} e^{-x} e^{-x} dx = \left\{ -e^{-x} dx = dy \right\} \\ &= \int_0^1 (1 - y)^{m-1} y dy. \end{aligned}$$

Här blir $(1 - y)^{m-1} y$ en $\beta(2, m)$ -täthet om vi balanserar med konstanten $\frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m)\Gamma(2)} = m(m+1)$ och integrerar sig då till 1. Vi får alltså $\mathbb{P}(M = m) = \frac{1}{m(m+1)}$.

Uppgift 6

För ett stort antal oberoende observationer ur en fördelning med begränsat stöd bör den största observationen ligga nära den övre gränsen för stödet och den minsta nära den undre gränsen för stödet. I det här fallet gissar vi alltså att $\max_{1 \leq k \leq n} X_k$ konvergerar mot 1 och $\min_{1 \leq k \leq n} X_k$ mot 0. Vi visar först att $\max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{p} 1$: För $\varepsilon > 1$ har vi att $P(|\max_{1 \leq k \leq n} X_k - 1| > \varepsilon) = 0$, och för $\varepsilon \in (0,1)$ gäller att

$$\begin{aligned} P\left(|\max_{1 \leq k \leq n} X_k - 1| > \varepsilon\right) &= P\left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k < 1 - \varepsilon\right) \\ &= P(\text{alla } X_k < 1 - \varepsilon) \\ &\stackrel{\text{ober.}}{=} P(X_1 < 1 - \varepsilon)^n \\ &= (1 - \varepsilon)^n, \end{aligned}$$

vilket går mot 0 då $n \rightarrow \infty$. Alltså gäller att $\max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{p} 1$. På liknande sätt visas att $\min_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{p} 0$: För $\varepsilon > 1$ har vi att $P(\min_{1 \leq k \leq n} X_k > \varepsilon) = 0$, och för $\varepsilon \in (0,1)$ gäller att

$$\begin{aligned} P\left(\min_{1 \leq k \leq n} X_k > \varepsilon\right) &= P(\text{alla } X_k > \varepsilon) \\ &\stackrel{\text{ober.}}{=} P(X_1 > \varepsilon)^n \\ &= (1 - \varepsilon)^n, \end{aligned}$$

vilket går mot 0 då $n \rightarrow \infty$. Vi får nu för $W_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \min_{1 \leq k \leq n} X_k$ att $W_n \xrightarrow{p} 1 - 0 = 1$ (Slutskys sats) och eftersom konvergens i sannolikhetsmedför konvergens i fördelning så följer att $W_n \xrightarrow{d} 1$.