

Tentamen i Sannolikhets teori II, 23 maj 2025

Examinator: Mia Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Tabell över sannolikhetsfördelningar som delas ut vid tentamenstillfället. Miniräknare är ej tillåtna.

Återlämning: Resultat läggs in i ladok senast 1 juni.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Tentamen är indelad i en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 30 poäng vardera. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen. Nedanstående gränser gäller för de olika betygsstegen. Resonemang ska vara klara och tydliga.

	Betyg				
	A	B	C	D	E
Basdel	20	20	20	20	20
Betygsgrundande del	25	19	13	7	0

Basdel

Uppgift 1

En icke-negativ heltalsvärd stokastisk variabel X har sannolikhetsgenererande funktion $g_X(t) = \frac{1}{3}(1 + t + t^2)$.

- a) Ange sannolikhetsfunktionen för X .
- b) Bestäm den momentgenererande funktionen för X .
- c) Bestäm $\mathbb{E}[X]$ med hjälp av den momentgenererande funktionen och kontrollera svaret med hjälp av sannolikhetsfunktionen i a).
- d) Antag att Y har samma fördelning som X och är oberoende av X . Bestäm den sannolikhetsgenererande funktionen för $X + Y$.

Uppgift 2

Låt $(X_1, X_2)'$ vara tvådimensionellt normalfördelad. Marginalfördelningen för både X_1 och X_2 är $N(0,1)$ och $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

- a) Ange den simultana tätheten för $(X_1, X_2)'$.
- b) Definiera $Y_1 = 3X_1 - X_2 + 1$ och $Y_2 = X_1 + 3X_2 - 4$. Bestäm fördelningen för $(Y_1, Y_2)'$.
- c) Bestäm fördelningen för Y_1 givet att $Y_2 = 0.5$.

Uppgift 3

Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende $\text{Po}(2)$ -variabler och definiera $Y_n = X_1 + \dots + X_n$.

- a) Visa att $(Y_n - 2n)/\sqrt{n}$ konvergerar i fördelning och identifiera gränsfördelningen.
- b) Visa att gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq 2n)$ existerar och bestäm detta.

Betygsgrundande del

Uppgift 4

Den tvådimensionella stokastiska variabeln $(X, Y)'$ har tätheten

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx & \text{för } 0 < x^3 < y < \sqrt{x} < 1; \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där c är en konstant. Bestäm fördelningen för XY .

Uppgift 5

Alla kollektivresenärer vet att om det står många väntande vid en hållplats så tyder det på att lång tid har gått sedan en buss senast avgick från hållplatsen. En dag kommer Kajsa till sin vanliga hållplats. Innan hon har sett hur många som väntar är hennes uppfattning att den tid T som har förflutit sedan det senast gick en buss är exponentialfördelad med väntevärde 10 minuter. Hon ansätter också en modell som säger att antalet passagerare N som står och väntar vid hållplatsen är Poissonfördelat med väntevärde $2T$.

- a) Kajsa observerar nu att N har utfallit med värdet 0, dvs ingen står och väntar vid busshållplatsen när hon anländer. Beräkna sannolikheten för detta, dvs beräkna $\mathbb{P}(N = 0)$.
- b) Beräkna den betingade fördelningen för T givet att $N = 0$.

Uppgift 6

Med start i 0 slumpvandrar en partikel på tallinjens heltalspunkter. Vid varje tidpunkt $1, 2, 3, \dots$ tar partikeln ett steg till höger eller ett steg till vänster med lika sannolikhet, eller så stannar den kvar med sannolikhet $p > 0$. Låt X vara partikelns läge då den för första gången stannar kvar.

- a) Bestäm den momentgenererande funktionen för X .
- b) Bestäm $\mathbb{E}[X]$.

Lycka till!