

Lösningar Sannolikhetssteori II

23 maj 2025

Uppgift 1

a) Vi har att $g_x(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathbb{P}(X = n)$ och genom att identifiera koefficienter ser vi att $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/3$.

b) Den momentgenererande funktionen ges av $\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = g_X(e^t) = \frac{1}{3}(1 + e^t + e^{2t})$.

c) Med hjälp av mfg får vi $\mathbb{E}[X] = \psi'_X(0) = \frac{1}{3}(e^t + 2e^{2t})|_{t=0} = 1$ och med hjälp av sannolikhetsfunktionen $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^3 n\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{3}(1 + 2) = 1$.

d) Eftersom X och Y är oberoende och lika fördelade, får vi $g_{X+Y}(t) = g_X(t)^2 = \frac{1}{9}(1 + t + t^2)^2$.

Uppgift 2

a) Eftersom X_1 och X_2 är multivariat normalfördelade och okorrelerade så är de oberoende. Vi får alltså

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2} \quad \text{för } x_1, x_2 \in (-\infty, \infty).$$

b) Vi har att $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} + \mathbf{b}$, där $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Eftersom $\mathbf{X}$ är multivariat normalfördelat med $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ och $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$, så är $\mathbf{Y}$ multivariat normalfördelat med $\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = B\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{b} = \mathbf{b}$ och $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = BB' = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$.

c) I $\text{Cov}(\mathbf{Y})$ ser vi att $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ och eftersom $\mathbf{Y}$ är multivariat normalfördelat betyder det att Y_1 och Y_2 är oberoende. Vi har alltså att $(Y_1|Y_2 = 5) \stackrel{d}{=} Y_1 \sim N(1, 10)$.

Uppgift 3

a) Vi har att $\mathbb{E}[X_i] = \text{Var}(X_i) = 2$ och enligt centrala gränsvärdessatsen gäller alltså att $(Y_n - 2n)/\sqrt{2n} \xrightarrow{d} N(0,1)$, dvs $(Y_n - 2n)/\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,2)$.

b) Vi har att $\mathbb{P}(Y_n \leq 2n) = \mathbb{P}(Y_n - 2n \leq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - 2n}{\sqrt{2n}} \leq 0\right) \rightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Uppgift 4

Vi har att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} c x dy dx = c \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3) dx = \frac{c}{5}.$$

vilket betyder att $c = 5$. Låt nu $U = XY$ och $V = X$. Enligt transformationssatsen gäller då att

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v, u/v) |J| = 5v \left| -\frac{1}{v} \right| = 5$$

för $0 < v^3 < u/v < \sqrt{v} < 1$ och $f_{U,V}(u,v) = 0$ annars. Vi söker den marginella täthetsfunktionen för U , som blir

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v) dv = \int_{u^{2/3}}^{u^{1/4}} 5 dv = 5(u^{1/4} - u^{2/3})$$

för $0 < u < 1$ och $f_U(u) = 0$ annars.

Uppgift 5

Vi har att $N|T = t \sim \text{Po}(2t)$ och $T \sim \text{Exp}(10)$ (med Guts parameterisering).

a) Med hjälp av lagen om total sannolikhet fås

$$\mathbb{P}(N = 0) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(N = 0|T = t) f_T(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot \frac{1}{10} e^{t/10} dt = \frac{1}{21}.$$

b) Den betingade fördelningsfunktionen blir

$$F_{T|N=0}(t) = \mathbb{P}(T \leq t | N = 0) = \frac{\int_0^t \mathbb{P}(N = 0|T = y) f_T(y) dy}{\mathbb{P}(N = 0)} = 1 - e^{-2.1t},$$

och derivering ger $f_{T|N=0}(t) = 2.1e^{-2.1t}$ för $t \geq 0$, dvs $T|N = 0 \sim \text{Exp}(2.1)$.

Uppgift 6

Låt N vara $\text{Ge}(p)$, dvs $\mathbb{P}(N = n) = q^n p$ för $n \geq 0$, och låt $\{Y_i\}$ vara i.i.d. med $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = 1/2$. Då gäller att $X \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_N$.

a) Vi har att $g_N(t) = p/(1 - qt)$ för $qt < 1$ och $\psi_Y(t) = (e^t + e^{-t})/2$ för alla t . Från sats i boken får vi (för $q(e^t + e^{-1})/2 < 1$) att

$$\psi_X(t) = g_N(\psi_Y(t)) = \frac{p}{1 - q(e^t + e^{-t})/2}.$$

b) Vi har $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_1] = 0$ (eftersom $\mathbb{E}[Y] = 0$) och $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[N]\text{Var}(Y) + \mathbb{E}[Y]^2\text{Var}(N) = q/p$ (alternativt kan detta fås genom att derivera den momentgenererande funktionen).