

Lösningsförslag

Tentamen 2025-05-23:
Nationalekonomi för aktuarier (MT7016)
och
National ekonomi för matematiker (MT3004)

Lösningsförslag 1

(A) Se föreläsningssanteckningar från Dag 11.

(B) Se föreläsningssanteckningar från Dag 2.

Lösningsförslag 2

(A) Jämviktskvantiteten Q^* är den kvantitet som gör att $P_d = P_s$. I detta fall motsvarar detta $Q^* = 10 - Q^*$. Lösningen blir således $Q^* = 5$. Motsvarande jämviktspris ges av $P^* = Q^* = 5$.

Konsumentöverskottet (se föreläsningssanteckningar Dag 10) ges av arean mellan efterfrågefunktionen $P_d = 10 - Q$ och jämviktspriset $P^* = 5$, givet att kvantiteten Q går från 0 till jämviktskvantiteten $Q^* = 5$; denna area motsvarar en triangel och konsumentöverskottet blir således $(10 - 5) * 5/2 = 12,5$.

Producentöverskottet ges på samma sätt av arean mellan utbudsfunktionen $P_s = Q$ och jämviktspriset $P^* = 5$, givet att kvantiteten Q går från 0 till jämviktskvantiteten $Q^* = 5$; producentöverskottet blir således $5 * 5/2 = 12,5$.

(B) Vid priset 6 är den kvantitet producenterna skulle vilja sälja $Q_s = P = 6$, men den inhemska efterfrågan är dock endast $Q_d = 10 - P = 4$.

Konsumentöverskottet ges av arean mellan efterfrågefunktionen $P_d = 10 - Q$ och priset $P = 6$ (som enligt prisgolvet är det lägsta möjliga priset), givet att kvantiteten Q går från 0 till 4 (vilket är den kvantitet som kommer att köpas, och därmed även att produceras, i jämvikt, givet prisgolvet); konsumentöverskottet blir således $(10 - 6) * 4/2 = 8$.

Producentöverskottet ges av arean mellan utbudsfunktionen $P_s = Q$ och priset $P = 6$, givet att kvantiteten Q går från 0 till 4; denna area ges av en rektangel och en triangel, motsvarande $(6 - 4) * 4 + 4 * 4/2 = 16$. Producentöverskottet är alltså 16.

(C) De producenter som får sälja de prisreglerade varorna tjänar på prisgolvet. Alla andra (dvs konsumenterna och producenterna som inte får sälja de prisreglerade varorna) förlorar på prisgolvet.

Lösningsförslag 3

(A) För $t > 0$ gäller att $px = m \Leftrightarrow tpx = tm$. Det följer att

$$\begin{aligned} V(p, m) &= \{\max_x U(x) : px = m\} \\ &= \{\max_x U(x) : tpx = tm\} \\ &= V(tp, tm). \end{aligned}$$

Tolkningen är att om alla priser och mängden pengar vi har ökar procentuellt lika mycket så förändras inte den indirekta nyttan.

(B) Definiera mängderna

$$B = \{x : px \leq m\}, \text{ och } B' = \{x : px \leq m'\},$$

vilket innebär att $B \subseteq B'$ om $m \leq m'$. Notera nu att

$$V(p, m) = \{\max_x U(x) : px \leq m\}$$

motsvarar maximering över B , medan

$$V(p, m') = \{\max_x U(x) : px \leq m'\}$$

motsvarar maximering över B' . Eftersom maximering över en mängd B' inte kan ge ett lägre värde än maximering över $B \subseteq B'$, så erhålls $V(p, m) \leq V(p, m')$ om $m \leq m'$, vilket är vad vi skulle visa.

Tolkningen är att om vi får mer pengar så kan vår indirekta nytta inte minska.

Lösningsförslag 4

(A) Om olyckan sker har konsumenten

$$W - L + q$$

och om olyckan inte sker har konsumenten

$$W - \alpha q.$$

Situationen kan därmed beskrivas enligt följande lotteri:

$$p \circ (W - L + q) \oplus (1 - p) \circ (W - \alpha q)$$

Nyttan av lotteriet ges av

$$pu(W - L + q) + (1 - p)u(W - \alpha q).$$

(B) Vi maximerar nyttan av lotteriet genom att derivera nyttan av lotteriet (m.a.p. q) och sätta denna derivata till noll:

$$pu'(W - L + q^*) + (1 - p)u'(W - \alpha q^*)(-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u'(W - L + q^*)}{u'(W - \alpha q^*)} = \frac{1 - p}{p} \alpha.$$

Aktuarisk försäkring resulterar i att $\alpha = \frac{p}{1-p}$.¹ Vi använder detta och likheten ovan, och erhåller

$$u'(W - L + q^*) = u'(W - \alpha q^*)$$

Eftersom $u''(\cdot) < 0$ får vi att ovanstående likhet endast kan hålla om

$$W - L + q^* = W - \alpha q^*,$$

dvs. konsumenten köper full försäkring, eftersom olycka och ej olycka ger samma värde (använd första delen av svaret i **A** för att inse detta). Förenkling av detta uttryck ger

$$q^* = \frac{L}{1 + \alpha} = L(1 - p).$$

Lösningssförslag 5

(A) Den optimala varukorgen ges av lösningen till problemet att maximera

$$U(Q_1, Q_2) = e^{Q_1 Q_2}$$

givet budgetrestriktionen $Q_1 P_1 + Q_2 P_2 \leq 100$ och $Q_1, Q_2 \geq 0$. Det inses direkt att detta är ekvivalent med att maximera

$$U(Q_1, Q_2) = Q_1 Q_2$$

givet budgetrestriktionen $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 100$ och $Q_1, Q_2 \geq 0$.

Vi skriver nu om budgetrestriktionen till $Q_2 = \frac{100}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} Q_1$ och inser att vårt maximeringsproblem kan skrivas om till

$$\max_{\frac{100}{P_1} \geq Q_1 \geq 0} Q_1 \left(\frac{100}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} Q_1 \right).$$

Lösningen till detta problem erhålls enkelt (med grundläggande optimering, dvs. vi sätter derivatan lika med noll) till $Q_1^* = \frac{50}{P_1}$. Genom att stoppa in denna kvantitet i budgetrestriktionen erhålls

$$Q_2^* = \frac{100}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} Q_1^* = \frac{100}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} \frac{50}{P_1} = \frac{50}{P_2}.$$

Den optimala varukorgen är alltså

$$(Q_1^*, Q_2^*) = \left(\frac{50}{P_1}, \frac{50}{P_2} \right).$$

(Den optimala varukorgen motsvarar således att vi spenderar 50 SEK på vara 1 och 50 SEK på vara 2, samtidigt som vi kommer att köpa en större kvantitet av den vara som är billigast).

¹I enlighet med föreläsningssanteckningar Dag 11 så bestäms α så att försäkringsbolagets förväntade vinst är noll: $p(-q) + (1-p)\alpha q = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{p}{1-p}$.

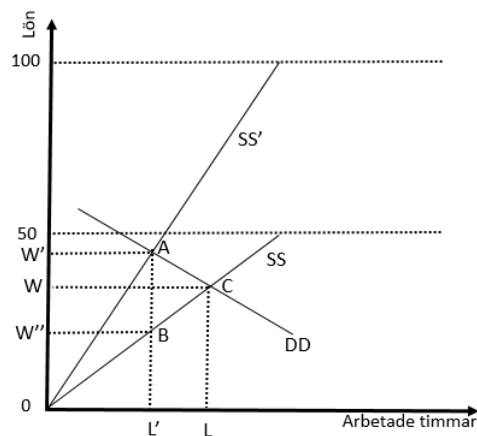
(B) Att hitta efterfrågan innebär att vi för varje givet pris $P_1 > 0$ ska identifiera motsvarande efterfrågade kvantitet Q_1 . För varje givet pris $P_1 > 0$ blir budgetrestriktionen $Q_1 P_1 + Q_2 = 100$ (kom ihåg att $P_2 = 1$, enligt uppgiften). Givet detta erhålls (på ungefär samma sätt som i uppgiften ovan) att den efterfrågade kvantiteten är lösningen till

$$\max_{\frac{100}{P_1} \geq Q_1 \geq 0} Q_1(100 - P_1 Q_1)$$

vilken enkelt (som i uppgiften ovan) identifieras till $Q_1 = 50/P_1$. Vi kan således uttrycka efterfrågekurvan som

$$P_1(Q_1) = 50/Q_1.$$

Lösningsförslag 6



- (A) Se figur.
- (B) Se figur.
- (C) Skatteintäkten ges av $L'(W' - W'')$.
- (D) Företagens skatteincidens ges av $L'(W' - W)$.
- (E) Arealen av triangeln ABC utgör svinn/dödviktsförlust. Arealen motsvarar värdet av timmarna som inte arbetas jämfört med om skatten vore noll.