Stockholms universitet, Institutionen för matematik

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 22 Mars 2019, 9:00–14:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: 1) Miniräknare från institutionen, 2) Valfri litteratur skriven på papper.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa. För standardnormalfördelningen gäller: $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64$, $\Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$, $\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58$.

- -

Uppgift 1

Betrakta en idealiserad försäkringsmarknad med 1 återförsäkringsbolag och $n \geq 2$ identiska försäkringsbolag vars totala skadebelopp $S_1, \dots, S_n$ är oberoende och likafördelade med egenskapen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{P}(S_k > \lambda x)}{\mathrm{P}(S_k > x)} = \lambda^{-\alpha}$$

för alla $\lambda > 0$ och något $\alpha > 0$. Antag att återförsäkringsbolaget överväger två alternativ: antingen att återförsäkra ett av bolagen fullt ut, dvs ta hela skadekostnaden, eller att återförsäkra samtliga bolag genom proportionell återförsäkring med andelen $1/n$ för samtliga. Beräkna approximativt kvoten, uttryckt i n och α, av sannolikheterna för att återförsäkringsbolagets skadekostnad överstiger ett mycket stort skadebelopp för de två alternativen. Tolka resultatet. (10 p)

Uppgift 2

Betrakta ett försäkringsbolag som erbjuder identiska försäkringsprodukter till kunder som drabbas av skador oberoende av varandra, med skadebelopp per kontrakt $X_1, X_2, \dots$ som är oberoende och likafördelade, och oberoende av antalet kontrakt med skador. Givet den nuvarande premien p_0 per kontrakt är antal kontrakt Poissonfördelat med parameter μ. Givet en annan premie p_1 är antal kontrakt Poissonfördelat med parameter $\mu(p_0/p_1)$. Bestäm väntevärde och varians för nettointäkten, dvs premieintäkter minus skadeutbetalningar, givet en godtycklig premie p_1. (10 p)

Uppgift 3

Betrakta historiska aggregerade utbetalningar för en viss produkt i skadetriangeln (skadetrapezoiden) i Tabell 1. Använd chain-ladder-metoden för att

(a) Prediktera $C_{3,5}$. (5 p)

(b) Skatta medelfelet för prediktorn i (a). (5 p)

	1	2	3	4	5
0	3487	8203	9831	11540	12060
1	4415	9359	10741	12167	13057
2	4971	9962	10915	11486	$C_{2,5}$
3	3470	8561	9899	$C_{3,4}$	$C_{3,5}$
4	5854	12783	$C_{4,3}$	$C_{4,4}$	$C_{4,5}$
5	6418	$C_{5,2}$	$C_{5,3}$	$C_{5,4}$	$C_{5,5}$

Table 1: Kumulativa utbetalda belopp. För $i+k>6$ är $C_{i,k}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 4

Betrakta historiska aggregerade utbetalningar för en viss produkt i skadetriangeln (skadetrapezoiden) i Tabell 1. Ett nystartat bolag erbjuder samma produkt och bedömer utvecklingsmönstret för skador över tid från ett visst skadeår kan skattas med chain-ladder-metoden på skadetriangeln 1. Parametrarna $f_1,\dots,f_4,\sigma_1,\dots,\sigma_4$ antas skattade och kan här betraktas som kända. Antag att "nu" är i början av det första skadeåret för bolaget. Antag att den totala skadeutbetalningen under första utvecklingsåret är normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse ν. Antag att diskonteringsfaktorerna ges av $d(0,t)=1/(1+r)^t$ och att räntan r inte ändras med tiden. Bestäm storleken på det kapital som ska placeras i en riskfri 1-årig nollkupongsobligation, prissatt enligt en diskonteringsfaktor ovan, för att bolaget ska anses solvent enligt riskmåttet $\mathrm{VaR}_{0.005}$ med 1-årig tidshorizont. (10 p)

Uppgift 5

Ett försäkringsbolag har ett totalt skadebelopp för en viss produkt som antas beskrivas väl med en sammansatt Poissonfördelning där antalet skador är Poissonfördelat med parameter 1000 och skadebeloppen är lognormalfördelade med väntevärde 100 och standardavvikelse 40. Ett återförsäkringsbolag erbjuder ett XL-skydd med undre brytpunkten 180 och ingen övre brytpunkt för samtliga kontrakt.

(a) Uttryck totala skadekostnaden för återförsäkringsbolaget som en sammansatt Poissonfördelad variabel. (5 p)

(b) Bestäm återförsäkringspremien då den svarar mot 110% av den förväntade totala skadekostnaden för återförsäkringsbolaget. (5 p)

Uppgift 1

De två skadekostnads-variablerna för återförsäkringsbolaget är

$$R_1 = S_1, \quad R_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Genom att använda subexponentialitet och reguljär variation fås

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{P}(R_1 > x)}{\mathrm{P}(R_2 > x)} &= \frac{\mathrm{P}(S_1 > x)}{\mathrm{P}(S_1 + \cdots + S_n > nx)} \\
&\approx \frac{\mathrm{P}(S_1 > x)}{n\,\mathrm{P}(S_1 > nx)} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{P}(S_1 > (1/n)nx)}{\mathrm{P}(S_1 > nx)} \\
&\approx \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \\
&= n^{\alpha - 1}.
\end{aligned}$$

Alltså, om $\alpha > 1$ är det mer riskfyllt, i termer av sannolikhet för mycket stora förluster, att enbart återförsäkra ett bolag jämfört med att delvis återförsäkra samtliga. Om $\alpha \in (0, 1)$ gäller det omvända.

Uppgift 2

Nettointäkten är

$$Y = \sum_{k=1}^{N} Z_k, \quad Z_k := \big(p_1 - X_k\big), \quad N \sim \mathrm{Pois}\Big(\mu\frac{p_0}{p_1}\Big).$$

Y har en sammansatt fördelning på standardform. Följaktligen, notera att $\mathrm{E}[N] = \mathrm{Var}(N)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[Z_1] = \mu\frac{p_0}{p_1}(p_1 - \mathrm{E}[X_1]), \\
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(N)\,\mathrm{E}[Z_1]^2 \\
&= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[Z_1^2] \\
&= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[(p_1 - X_1)^2] \\
&= \mu\frac{p_0}{p_1}\big(p_1^2 - 2p_1\,\mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_1^2]\big)
\end{aligned}$$

Uppgift 3

(a)

$$\widehat{C}_{3,5} = C_{3,3}\widehat{f}_3\widehat{f}_4, \quad \widehat{f}_3 = \frac{C_{0,4} + C_{1,4} + C_{2,4}}{C_{0,3} + C_{1,3} + C_{2,3}}, \quad \widehat{f}_4 = \frac{C_{0,5} + C_{1,5}}{C_{0,4} + C_{1,4}}$$

$\widehat{f}_3 = 1.117699$, $\widehat{f}_4 = 1.059476$, $\widehat{C}_{3,5} = 11722.16$

(b)

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{mse}(\widehat{C}_{3,5})} &= \widehat{C}_{3,5}^2 \sum_{k=3}^{4} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{f}_k^2}\Big(\frac{1}{\widehat{C}_{3,k}} + \frac{1}{\sum_{j=0}^{5-k} C_{j,k}}\Big) \\
&= \widehat{C}_{3,5}^2 \Big[\frac{\widehat{\sigma}_3^2}{\widehat{f}_3^2}\Big(\frac{1}{C_{3,3}} + \frac{1}{C_{0,3}+C_{1,3}+C_{2,3}}\Big) + \frac{\widehat{\sigma}_4^2}{\widehat{f}_4^2}\Big(\frac{1}{\widehat{C}_{3,4}} + \frac{1}{C_{0,4}+C_{1,4}}\Big)\Big] \\
&= C_{3,3}^2 \widehat{f}_3^2 \widehat{f}_4^2 \Big[\frac{\widehat{\sigma}_3^2}{\widehat{f}_3^2}\Big(\frac{1}{C_{3,3}} + \frac{1}{C_{0,3}+C_{1,3}+C_{2,3}}\Big) + \frac{\widehat{\sigma}_4^2}{\widehat{f}_4^2}\Big(\frac{1}{C_{3,3}\widehat{f}_3} + \frac{1}{C_{0,4}+C_{1,4}}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

där

$$
\widehat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} C_{i,3}\Big(\frac{C_{i,4}}{C_{i,3}} - \widehat{f}_3\Big)^2, \quad \widehat{\sigma}_4^2 = \sum_{i=0}^{1} C_{i,4}\Big(\frac{C_{i,5}}{C_{i,4}} - \widehat{f}_4\Big)^2
$$

$\widehat{\sigma}_3 = 6.327915$, $\widehat{\sigma}_4 = 2.161611$, $\widehat{\mathrm{mse}(\widehat{C}_{3,5})}^{1/2} = 812.7965$

Uppgift 4

$$
L_1 = X_1 + \sum_{t=2}^{5} d(1,t)\,\mathrm{E}[X_t \mid \mathcal{F}_1] = X_1 + \sum_{t=2}^{5} d(0,t-1)\,\mathrm{E}[X_t \mid X_1]
$$

där $X_1 \sim N(\mu, \nu^2)$ och, enligt chain-ladder-metoden,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_2 \mid X_1] &= X_1(f_1 - 1), \\
\mathrm{E}[X_3 \mid X_1] &= X_1 f_1 (f_2 - 1), \\
\mathrm{E}[X_4 \mid X_1] &= X_1 f_1 f_2 (f_3 - 1), \\
\mathrm{E}[X_5 \mid X_1] &= X_1 f_1 f_2 f_3 (f_4 - 1).
\end{aligned}
$$

Alltså,

$$
L_1 = X_1 \cdot c, \quad c := 1 + d(0,1)(f_1 - 1) + d(0,2) f_1 (f_2 - 1) + \cdots + d(0,4) f_1 f_2 f_3 (f_4 - 1)
$$

som är normalfördelad med $\mathrm{E}[L_1] = \mu \cdot c$ och $\mathrm{Var}(L_1) = \nu^2 c^2$. Därför är

$$
\mathrm{VaR}_{0.005}(0 - L_1) = \frac{\mu \cdot c + \nu \cdot c \cdot \Phi^{-1}(0.995)}{1+r} \approx \frac{\mu \cdot c + 2.58 \cdot \nu \cdot c}{1+r}
$$

beloppet som krävs (och ska investeras i en 1-årig nollkupongsobligation) för solvens.

Uppgift 5

Totala skadekostnaden delas mellan återförsäkringsbolaget och försäkringsbolaget enligt $S = R + D$ där

$$
R = \sum_{k=1}^{N} \max(X_k - 180, 0), \quad D = \sum_{k=1}^{N} \min(X_k, 180), \quad N \sim \mathrm{Pois}(1000).
$$

Dekomposition av sammansatt Poisson ger att

$$R \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{M} Z_k,$$

där M och $Z_1, Z_2, \ldots$ är oberoende,

$$M \sim \mathrm{Pois}(1000 \cdot \mathrm{P}(X_1 > 180))$$

och

$$\mathrm{P}(Z_k > x) = \mathrm{P}(X_1 > x + 180 \mid X_1 > 180) = \frac{\mathrm{P}(X_1 > x + 180)}{\mathrm{P}(X_1 > 180)}.$$

Notera att, med W standardnormal,

$$\mathrm{P}(X_1 > x) = \mathrm{P}(e^{\mu+\sigma W} > x) = \mathrm{P}(W > (\log x - \mu)/\sigma) = 1 - \Phi((\log x - \mu)/\sigma).$$

Storheten som ska beräknas är $1.1 \cdot \mathrm{E}[R] = 1.1 \cdot \mathrm{E}[M]\,\mathrm{E}[Z_1]$ där

$$\mathrm{E}[M] = 1000 \cdot \mathrm{P}(X_1 > 180), \quad \mathrm{E}[Z_1] = \mathrm{E}[X_1] - \mathrm{E}[\min(X_1, 180)].$$

Johansson s. 32-33 ger att parametrarna för lognormalfördelningen är, med $\mathrm{E}[X] = 100$, $\mathrm{E}[X^2] = 40^2 + 100^2$,

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \log \mathrm{E}[X] - \frac{1}{2} \log \mathrm{E}[X^2] = 4.53096, \\ \sigma^2 &= \log \mathrm{E}[X^2] - 2 \log \mathrm{E}[X] = 0.14842. \end{aligned}$$

Vidare gäller att, se Johansson s. 32,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_1] &= e^{\mu+\sigma^2/2}, \\ \mathrm{E}[\min(X_1, 180)] &= e^{\mu+\sigma^2/2}\Phi\Big(\frac{\log 180 - \mu - \sigma^2}{\sigma}\Big) + 180\Big(1 - \Phi\Big(\frac{\log 180 - \mu}{\sigma}\Big)\Big). \end{aligned}$$