MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik

Lösningsförslag till numerisk analys teoriprov 190118

(1) Sätt ett kryss framför det rätta svaret.
  (a) Kvadratiskt konvergent
  (b) A^{-1} har 10^8 nollskilda element medan L och U tillsammans har $3 \cdot 10^4$ nollskilda element .
  (c) Vid addition och subtraktion skall gränserna för operandernas absoluta fel adderas.
  (d) Ett interpolationsproblem.
  (e) Valet av $c = 1000$ är olämpligt eftersom problemet blir illa-konditionerat.

(2) Vi har genom Taylorutveckling

$$\begin{aligned}
&\frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)\right]\\
=&\frac{h}{3}\Bigg[f(a)+4f(a)+4hf'(a)+\frac{4}{2}h^2f''(a)+\frac{4}{6}h^3f'''(a)+\frac{4}{24}h^4f^{(4)}(a)+\cdots\\
&\quad+f(a)+2hf'(a)+\frac{(2h)^2}{2}f''(a)+\frac{(2h)^3}{6}f'''(a)+\frac{(2h)^4}{24}f^{(4)}(a)+\cdots\Bigg]\\
=&2hf(a)+2h^2f'(a)+\frac{4}{3}h^3f''(a)+\frac{2}{3}h^4f'''(a)+\frac{100}{3\cdot 5!}h^5f^{(4)}+\cdots
\end{aligned}$$

Integralkalkylens fundamentala satsen ger

$$F(a+2h)=\int_a^{a+2h}f(x)dx=F(a)+2fF'(a)+\frac{(2h)^2}{2}F''(a)+\frac{2h)^3}{6}F'''(a)+\frac{(2h)^4}{4!}F^{(4)}(a)+\frac{(2h)^5}{5!}F^{(5)}(a)+\cdots$$

$$= 2hf(a)+2h^2f'(a)+\frac{4}{3}h^3f''(a)+\frac{2}{3}h^4f'''(a)+\frac{32}{5!}h^5f^{(4)}(a)+\cdots$$

$$\Longrightarrow$$

$$F(a+2h)-\frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)\right]=-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(a)+\cdots$$

Det betyder att felet är

$$E=-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(a,b)$$

Eftersom fjärde derivatan av ett polynom av grad ≤ 3 alltid är noll visar feluppskaningen att Simpsonsregeln är exakt för polynom av grad ≤ 3.

(3) (a) närmevärdet $f(0)$ kan räknas enligt följande schema

0.1	64.987			
		−29.32		
0.2	62.055		−1.95	
		−29.905		−0.20833
0.4	56.074		−2.09883	
		−31.1625		
0.8	43.609			

Detta ger

$$f(0)=64.987-29.32(0-0.1)-1.95(0-0.1)(0-0.2)-0.20833(0-0.1)(0-0.2)(0-0.4)=67.8812$$

(b) Om värdena i tabellen har fel som inte överstiger 1/2 så kan vi addera felet i varje kolonn. Då kan vi uppskatta fel genom

$$
\begin{array}{cccccc}
0.1 & 0.5 & & & \\
 & & -10 & & \\
0.2 & \text{-0.5} & & 50 & \\
 & & 5 & & -89.3 \\
0.4 & 0.5 & & -12.5 & \\
 & & -2.5 & & \\
0.8 & \text{-0.5} & & &
\end{array}
$$

Så felet är

$$0.5 + 0.1 \cdot 10 + 0.02 \cdot 50 + 0.008 \cdot 89.3 = 3.2144 < 7/2$$

(c) Självklart är $f(0) = c_0$. Vi har

$$f(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h + c_3 h + \cdots, \quad f(2h) = c_0 + c_1 h + c_2(2h) + c_3(2h)h + \cdots$$

$$\implies c_0 = \underbrace{2f(h) - f(2h)}_{R_1(h)} + \tilde{c}_2 h^2 + \tilde{c}_3 h^3 + \cdots$$

$$R_1(h) = \frac{f(h) - f(2h)}{2-1} + f(h) \iff R_1(h) = f(h) + f[h, 2h](-h)$$

Vi har även $c_0 = R_1(2h) + \tilde{c}_2(2h)^2 + \tilde{c}_3(2h)^3 + \cdots \implies$

$$c_0 = \underbrace{\frac{R_1(h) - R_1(2h)}{2^2 - 1} + R_1(h)}_{R_2(h)} + c_3' h^3 + \cdots$$

Extrapolera en gång till fås

$$c_0 = \underbrace{\frac{R_2(h) - R_2(2h)}{2^3 - 1} + R_2(h)}_{R_3(h)} + c_4' h^4 + \cdots$$

Nu ska vi som för $R_1(h)$ skriva om $\frac{R_1(h)-R_1(2h)}{2^2-1}$ respektive $\frac{R_2(h)-R_2(2h)}{2^3-1}$ i term av dividerade differenser. Det görs genom direkta beräkningar enligt definition:

$$\frac{R_1(h) - R_1(2h)}{2^2 - 1} = \frac{f(h) + f[h, 2h](-h) - (f(2h) + f[2h, 2^2h](-2h)}{2^2 - 1}$$

$$= \frac{\frac{f(h)-f(2h)}{h-2h}(-h) + f[h, 2h](-h) - f[2h, 2^2h](-2h)}{2^2 - 1}$$

$$= \frac{f[h, 2h](-h) + f[h, 2h](-h) - f[2h, 2^2h](-2h)}{2^2 - 1} = \frac{2f[h, 2h](-h) - f[2h, 2^2h](-2h)}{2^2 - 1}$$

$$= \frac{2f[h, 2h](-h) - f[2h, 2^2h](-2h)}{2^2 - 1} = \frac{f[2h, 2^2h](-h) - f[h, 2h]}{(2^2 - 1)h}(2h^2) = f[h, 2h, 2^2h](-h)(-2h)$$

$$\implies$$

$$R_2(h) = R_1(h) + f[h, 2h, 2^2h](-h)(-2h) = f(h) + f[h, 2h](-h) + f[h, 2h, 2^2h](-h)(-2h)$$

På samma sätt

$$\frac{R_2(h) - R_2(2h)}{2^3 - 1} = \frac{R_1(h) + f[h, 2h, 2^2h](2h^2) - (R_1(2h) + f[2h, 2^2h, 2^3h](2 \cdot (2h)^2))}{2^3 - 1}$$

$$= \frac{\frac{R_1(h) - R_1(2h)}{2^2 - 1}(2^2 - 1) + f[h, 2h, 2^2h] \cdot 2h^2 - f[2h, 2^2h, 2^3h] \cdot 2 \cdot (2h)^2}{2^3 - 1}$$

$$= \frac{f[h, 2h, 2^2h](2h^2)(2^2 - 1) + f[h, 2h, 2^2h](2h^2) - f[2h, 2^2h, 2^3h] \cdot 2(2h)^2}{2^3 - 1}$$

$$= \frac{2^3h^2(f[h, 2h, 2^2h] - f[2h, 2^2h, 2^3h]))}{2^3 - 1} = \frac{2^3h^3(f[h, 2h, 2^2h] - f[2h, 2^2h, 2^3h]))}{(2^3 - 1)h}$$

$$= f[h, 2h, 2^2h, 2^3h](-h)(-2h)(-2^2h)$$

Så

$$c_0 = \frac{R_2(h) - R_2(2h)}{2^3 - 1} + R_2(h) = f(h) + f[h, 2h](-h) + f[h, 2h, 2^2h](-h)(-2h) + f[h, 2h, 2^2h, 2^3h](-h)(-2h)(-2^2h)$$

Alltså är det samma resultat som (a).

(4) (a) Genom insättningen av givna funktionerna i ekvationerna.

(b) Vi skriver systemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1000}{2} & \frac{999}{2} \\ \frac{999}{2} & -\frac{1000}{2} \end{pmatrix}$$

lösningen med Eulers metod är

$$y_{n+1} = y_n + hAy_n = (I + hA)y_n$$

Vi får $y_n = (I + hA)^n y_0$. Nu räknar vi matisen $(I + hA)^n$ genom diagonalisering av matrisen A. Vi kan inse att egenvärden är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -1000$. En direkt beräkning ger de motsvarande egenvektorerna $(1, 1)^\top$ rspektive $(1, -1)^\top$. Så

$$A = T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1000 \end{pmatrix} T^{-1}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vilket ger att

$$(I + hA)^n = T \begin{pmatrix} (1 - h)^n 0 & 0 \\ 0 & (1 - 1000h)^n \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\Longrightarrow$

$$y_{1,n} = C_1(1 - h)^n + C_2(1 - 1000h)^n$$
$$y_{2,n} = C_1(1 - h)^n - C_2(1 + -1000h)^n$$

(c) y_n går mot 0 då $n \to \infty$ endast om steglängden h är tillräckligt liten så att uppfylla

$$|1 - h| < 1 \quad \text{och} \quad |1 - 1000h| < 1$$

Så $h < 1/500 = 0.002$. I den exakta lösningen är e^{-1000t} försumbart liten jämfört med e^{-t}. Men det är tyvärr inte sant för den numeriska lösningen. För konvergens krävs steglängden mindre än 0.002. Trots att e^{-1000t} i praktiken inte bidrar till lösningen begränsar faktorn 1000 i exponenten kraftigt steglängden. I så fall är Eulers metod knappt lämplig. Då är de implicita metoder överlägsen.

(d) Då är de implicita metoder överlägsen. Låt oss studera följande (skalär) testproblem med framåt respektive bakåt Eulers metoder.

$$y' = \lambda y \quad y(0) = y_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

med fixed steglängden h.
Vi vet att lösningen är

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

som går mot 0 om och endast om $\mathrm{Re}\lambda < 0$, dvs $\lambda \in \mathbb{C}^-$. Framåt Eulers metod är

$$y_{k+1} = y_k + \lambda h y_k = (1 + \lambda h) y_k.$$

Bakåt Eulersmetod:

$$y_{k+1} = y_k + \lambda h y_{k+1} \ \Leftrightarrow y_{k+1} = (1 - \lambda h)^{-1} y_k.$$

De går mot 0 om och endast om $|1 + \lambda h| < 1$ respektive $|1 - \lambda h| > 1$. Vi skriver upp mängderna

$$\Omega_f = \{z : |1 + z| < 1\} \subset \mathbb{C}^-, \quad \mathbb{C}^- \subset \Omega_b = \{z : |1 - z| > 1\}$$

Alltså är Ω_f enhetsdiskskivan centrerad i -1, en delmängd av $\mathbb{C}^-$ där λ ligger och Ω_b utanför enhetsdiskskivan centrerad i 1 som täcker hela $\mathbb{C}^-$. Därför fungerar bakåt Eulers metod för alla steglängder medan framåt Eulers metod är inte så.

(5) Sätt $E_k = I - AX_k$. Då

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= I - AX_{k+1} = I - A(X_k + X_k(I - AX_k)) = I - AX_k - AX_k(I - AX_k) \\ &= (I - AX_k)(I - AX_k) = (I - AX_k)^2 = E_k^2 = E_0^{2^k} \end{aligned}$$

Använd en lämplig martisnorm kan vi få en uppskattning

$$\|E_k\| \leq \|E_0\|^{2^k} \to 0 \text{ då } k \to \infty$$

om $\|I - AX_0\| = \|E_0\| < 1$, dvs $AX_k \to I$. Vi får dessutom

$$\frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_k\|^2} < 1$$

Så konvergensen är kvadratisk.

Kvarstår att bevisa $AX_k = X_k A$ om $AX_0 = X_0 A$. Detta kan göras med matematisk induktion. Vi har redan bassteget klart. Antag nu att $AX_k = X_k A$. Vi har

$$\begin{aligned} AX_{k+1} &= A(X_k + X_k(I - AX_k)) = AX_k + AX_k(I - AX_k) \\ &= X_k A + X_k A(I - X_k A) = X_k A + X_k(I - AX_k)A = (X_k + X_k(I - AX_k))A = X_{k+1}A \end{aligned}$$

Så har vi bevisat att $AX_k \to I$ medför att $X_k \to A^{-1}$.

(6) (a) $\delta x = A^{-1}\delta b \Longrightarrow \|\delta x\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|\delta b\|_\infty = 136 \cdot 10^{-2} = 1.36$

(b) $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 33 \cdot 136 = 4488.$

Lösningen till ekvationssystemet är $x = 1, -1, 1, -1)^\top$. Då $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty = 1.36/1 = 1.36$. $\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty = 0.01/4 = 0.0025$. Kvoten av dem är $1.26/0.0025 = 554$.