STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter LeFanu Lumsdaine
och Menno de Boer

Exam / Tentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2020
Onsdag, 2020-05-27

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 7 problems (1–7), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 4 problems (8–11), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points. The questions are provided both in English (pp. 2–3) and Swedish (pp. 4–5).

You may submit your answers in either English or Swedish. Submissions should be uploaded as pdf assignments on the course website, either scanned or using LaTeX or similar. Further technical instructions can be found there.

The exam is open book: you can refer to the textbook, your own notes, and other reference resources. But you must not collaborate, discuss, or seek or receive assistance during the exam, either from each other within the course or from anyone else.

Write clearly and motivate your answers carefully. All answers should be fully justified (unless stated otherwise). You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

Written Exam (English)

Basic part

1 Which of the following formulas are tautologies? Justify your answers.

(a) $(P_1 \vee P_2) \wedge (P_2 \vee P_1)$

(b) $(P_1 \to P_2) \vee (P_2 \to P_1)$

2 Give the free variables of the following formulas:

(a) $\neg \exists x_1 \, \forall x_2 \; (P_5(x_2) \to f_3(x_2) \doteq x_1)$

(b) $(\forall x_1, x_2 \, f_1(x_1, x_2) \doteq f_2(x_2, x_1)) \to (f_1(x_1, x_1) \doteq f_2(x_1, x_1))$

3 Find the error in the following derivation:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P_1(x_1)]^1}{P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_1))}\,\vee I_L}{\forall x_1 \; (P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_1)))}\,\forall I}{P_1(f_1(x_2)) \to \forall x_1 \; (P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_1)))}\,\to I_2}{P_1(x_1) \to (P_1(f_1(x_2)) \to \forall x_1 \; (P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_1))))}\,\to I_1$$

Is the conclusion derivable without undischarged assumptions? Derive it, or give a countermodel.

4 Give derivations showing:

(a) $(\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2) \vdash \psi_1 \vee \psi_2$, for all formulas φ, ψ_1, ψ_2

(b) $\psi \wedge \forall x_1 \, \varphi \vdash \forall x_1 \; (\varphi \wedge \psi)$, for all formulas φ, ψ such that x_1 does not occur free in ψ.

5 Consider the following formulas:

$$\varphi := P_1 \to (P_2 \to P_3) \qquad\qquad \psi := \neg(P_1 \vee P_3)$$

Give three interpretations $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, such that neither φ nor ψ holds in $\mathcal{V}_0$; exactly one of these formulas holds in $\mathcal{V}_1$; and both hold in $\mathcal{V}_2$.

6 Show that for any theory Γ and formulas φ, ψ of predicate logic, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ if and only if $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

7 Show that the theory

$$\{ \; \exists x_1, x_2 \, \forall x_3 \; (x_3 \doteq x_1 \vee x_3 \doteq x_2) \, , \quad \forall x_1 \, \neg(f_1(x_1) \doteq x_1) \; \}$$

is consistent.

Problem part

8 Here is a possible alternative form of the elimination rule for $\wedge$:

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi],\ [\psi] \\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\ \wedge E\text{-ALT}$$

in which φ, ψ, σ may be any formulas, and the rule may discharge any assumptions of φ or ψ used in the derivation of the premise σ.

If we had included this rule in the rules of natural deduction, we would require an extra case for it in the inductive proof of the soundness theorem. Give that case.

9 Which of the following hold? For each, give a derivation or a countermodel.

(a) $\forall x_1\ (P_1(x_1) \vee P_2(x_1)) \ \vDash\ (\forall x_1\, P_1(x_1)) \vee (\forall x_1\, P_2(x_1))$

(b) $\neg(\forall x_1, x_2\, \neg P_2(x_1, x_2)) \ \vDash\ \exists x_1, x_2\, P_2(x_1, x_2)$

(c) $f_1(x_1) \doteq x_3 \wedge (\forall x_1\, P(x_1, x_2)) \ \vDash\ \forall x_1\ (f_1(x_1) \doteq x_3 \wedge P(x_1, x_2))$

10 Consider the structure $\mathcal{N} := \langle\, \mathbb{N}\,;\ \ ;\, 0, 1, +, \cdot\ \rangle$ (for the arity type $\langle\ \ ;\, 0, 0, 2, 2\,\rangle$).

Give a formula φ which represents the statement "x_1 has exactly two distinct prime factors" in this structure. That is, for any valuation of variables v in $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}, v \vDash \varphi$ should hold if and only if $v(x_1)$ has exactly two distinct prime factors.

(You do not need to justify that your formula represents this statement.)

11 Which of the following statements are true? Justify your answers.

(a) If Γ_1, Γ_2 are consistent theories, then $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ is consistent.

(b) If Γ_1, Γ_2 are consistent theories, then $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ is consistent.

(c) If $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is an increasing chain of consistent theories (i.e. each Γ_n is consistent, and $\Gamma_n \subseteq \Gamma_m$ for all $n < m \in \mathbb{N}$), then the union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ is consistent.

(d) If Γ_1, Γ_2 are maximally consistent theories, then $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ is maximally consistent.

——— End of exam ———

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1 Vilken av följande formler är tautologier? Motivera svaren.

(a) $(P_1 \vee P_2) \wedge (P_2 \vee P_1)$
(b) $(P_1 \to P_2) \vee (P_2 \to P_1)$

2 Ange de fria variablerna i följande formler:

(a) $\neg \exists x_1 \forall x_2 \; (P_5(x_2) \to f_3(x_2) \doteq x_1)$
(b) $(\forall x_1, x_2 \, f_1(x_1, x_2) \doteq f_2(x_2, x_1)) \to (f_1(x_1, x_1) \doteq f_2(x_1, x_1))$

3 Hitta felet i följande härledning:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P_1(x_1)]^1}{P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_1))} \vee I_L}{\forall x_1 \; (P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_1)))} \forall I}{P_1(f_1(x_2)) \to \forall x_1 \; (P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_1)))} \to I_2}{P_1(x_1) \to (P_1(f_1(x_2)) \to \forall x_1 \; (P_1(x_1) \vee P_1(f_1(x_1))))} \to I_1$$

Kan denna slutsatsen härledas utan oavslutade antagenden? Ange en härledning eller motmodell.

4 Ange härledningar som visar:

(a) $(\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2) \vdash \psi_1 \vee \psi_2$, för alla formler φ, ψ_1, ψ_2
(b) $\psi \wedge \forall x_1 \, \varphi \vdash \forall x_1 \; (\varphi \wedge \psi)$, för alla formler φ, ψ så att x_1 inte förekommer fri i ψ.

5 Betrakta följande formler:

$$\varphi := P_1 \to (P_2 \to P_3) \qquad\qquad \psi := \neg(P_1 \vee P_3)$$

Ange tre tolkningar $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, så att varken φ eller ψ gäller i $\mathcal{V}_0$; precis en av dessa formler gäller i $\mathcal{V}_1$; och både gäller i $\mathcal{V}_2$.

6 Visa att för varje predikatlogisk teori Γ och formler φ, ψ, vi har att $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ om och endast om $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

7 Visa att teorin

$$\{ \; \exists x_1, x_2 \forall x_3 \; (x_3 \doteq x_1 \vee x_3 \doteq x_2) \, , \quad \forall x_1 \, \neg(f_1(x_1) \doteq x_1) \; \}$$

är konsistent.

Problemdel

8 Här är en möjlig alternativ form av eliminationsregeln för $\wedge$:

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi],\ [\psi] \\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\ \wedge E\text{-ALT}$$

i vilken φ, ψ, σ kan vara godyckliga formler, och regeln kan avsluta antaganden av φ eller ψ som används i härledningen av premissen σ.

Om den här regeln hade inkluderats i reglerna för naturlig deduktion, så skulle vi behöva ett till fall i det induktiva beviset av sundhetssatsen. Ange det fallet.

9 Vilka av följande gäller? För var och en, ange en härledning eller en motmodell.

(a) $\forall x_1\ (P_1(x_1) \vee P_2(x_1)) \ \vDash\ (\forall x_1\, P_1(x_1)) \vee (\forall x_1\, P_2(x_1))$

(b) $\neg(\forall x_1, x_2\, \neg P_2(x_1, x_2)) \ \vDash\ \exists x_1, x_2\, P_2(x_1, x_2)$

(c) $f_1(x_1) \doteq x_3 \wedge (\forall x_1\, P(x_1, x_2)) \ \vDash\ \forall x_1\ (f_1(x_1) \doteq x_3 \wedge P(x_1, x_2))$

10 Betrakta strukturen $\mathcal{N} \coloneqq \langle\, \mathbb{N}\,;\ \ ;\, 0, 1, +, \cdot\ \rangle$ (för ställighetstypen $\langle\ \ ; 0, 0, 2, 2\,\rangle$).

Ange en formel φ som representerar påståendet "x_1 har precis två olika primfaktorer" i denna struktur. Det vill säga, för vilken som helst vardering av variabler v i $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}, v \vDash \varphi$ ska gälla om och endast om $v(x_1)$ har precis två olika primfaktorer.

(Du behöver inte redovisa noggrant att din formel representerar detta påstående.)

11 Vilka av följande påståenden är sanna? Motivera dina svar.

(a) Om Γ_1, Γ_2 är konsistenta teorier, så är $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ konsistent.

(b) Om Γ_1, Γ_2 är konsistenta teorier, så är $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ konsistent.

(c) Om $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är en växande kedja av konsistenta teorier (dvs varje Γ_n är konsistent, och $\Gamma_n \subseteq \Gamma_m$ för alla $n < m \in \mathbb{N}$), så är unionen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ konsistent.

(d) Om Γ_1, Γ_2 är maximalt konsistenta teorier, så är $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ maximalt konsistent.

——— Slut på provet ———