

STOCKHOLMS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Peter LeFanu Lumsdaine

och Menno de Boer

Re-exam / Omtentamen

MM5024 Logik 7,5 hp

VT 2020

Fredag, 2020-08-21

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 7 problems (1–7), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 4 problems (8–11), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points. The questions are provided both in English (pp. 2–3) and Swedish (pp. 4–5).

You may submit your answers in either English or Swedish. Submissions should be uploaded as pdf assignments on the course website, either scanned or using LaTeX or similar. Further technical instructions can be found there.

The exam is open book: you can refer to the textbook, your own notes, and other reference resources. But you must not collaborate, discuss, or seek or receive assistance during the exam, either from each other within the course or from anyone else.

Write clearly and motivate your answers carefully. All answers should be fully justified (unless stated otherwise). You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

Written Exam (English)

Basic part

1 Derive, or give a countermodel to, each of the following:

- (a) $P_1 \rightarrow \neg P_2 \vdash P_2 \rightarrow \neg P_1$
- (b) $P_1 \vee (P_2 \wedge P_3) \vdash (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3)$

2 Give the free variables of the following formulas:

- (a) $\exists x_2 f_1(x_1) \doteq x_2$
- (b) $(\forall x_3 P_{10}(x_7)) \rightarrow (\exists x_7 P_{10}(x_3))$

3 Let $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ be the interpretations defined as follows:

i	$P_1^{\mathcal{V}_i}$	$P_2^{\mathcal{V}_i}$	$P_3^{\mathcal{V}_i}$
1	0	0	1
2	1	1	1
3	1	0	1

- (a) Give a formula which holds in \mathcal{V}_1 and \mathcal{V}_2 , but not in \mathcal{V}_3
 - (b) Give a formula which holds in $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, and \mathcal{V}_3 , but is not a tautology.
- 4 (a) Give two distinct propositional formulas φ, ψ , such that $\varphi \approx \psi$.
- (b) Show that for all formulas φ, ψ , if $\varphi \approx \psi$ then $\vdash \varphi \rightarrow \psi$.
- 5 Show that for any formula φ ,

$$\vdash (\exists x_1 \neg \varphi) \rightarrow (\neg \forall x_1 \varphi).$$

6 Work over the arity type $\langle 2; \rangle$ (a single binary relation symbol). Let \mathcal{N} be the structure $\langle \mathbb{N}; <; \rangle$, and let $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ be the valuation with $v(i) = 0$ for all i , i.e. interpreting all variables as $0 \in \mathbb{N}$.

Compute the following truth-values:

- (a) $\llbracket P_1(x_1, x_2) \rightarrow P_1(x_2, x_1) \rrbracket^{\mathcal{N}, v}$
- (b) $\llbracket \forall x_1 (P_1(x_1, x_2) \rightarrow P_1(x_2, x_1)) \rrbracket^{\mathcal{N}, v}$

7 Is the formula $(\exists x_1 P_1(x_1)) \rightarrow (\forall x_1 P_1(x_1))$ a tautology? Justify your answer.

Problem part

8 Here is a possible alternative version of the elimination rule for \vee :

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \varphi \rightarrow \sigma \quad \psi \rightarrow \sigma}{\sigma} \vee E\text{-ALT}$$

in which φ, ψ, σ may be any formulas. Note that unlike the usual $\vee E$ rule, this does not discharge any assumptions.

If we had included this rule in the rules of natural deduction, we would require an extra case for it in the inductive proof of the soundness theorem. Give that case.

9 Over the arity type $\langle ; 2 \rangle$ (i.e. a single binary function symbol), consider the structures $\langle \mathbb{N}; ; + \rangle$ and $\langle \mathbb{N}; ; \times \rangle$: the natural numbers, with the operation of addition or multiplication respectively.

- (a) Give a closed formula which holds in $\langle \mathbb{N}; ; + \rangle$, but not in $\langle \mathbb{N}; ; \times \rangle$.
- (b) Give a closed formula which holds in both $\langle \mathbb{N}; ; + \rangle$ and $\langle \mathbb{N}; ; \times \rangle$, but is not a tautology.

(Recall that a formula is called closed if it has no free variables.)

10 We define the formulas φ_{inj} , φ_{surj} , φ_{invol} as follows:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{inj}} &:= \forall x_0, x_1 (f_1(x_0) \doteq f_1(x_1) \rightarrow x_0 \doteq x_1) \\ \varphi_{\text{surj}} &:= \forall x_0 \exists x_1 (f_1(x_1) \doteq x_0) \\ \varphi_{\text{invol}} &:= \forall x_0 (f_1(f_1(x_0)) \doteq x_0)\end{aligned}$$

- (a) Show that $\varphi_{\text{invol}} \vdash \varphi_{\text{inj}}$.
- (b) Show that $\varphi_{\text{inj}} \not\vdash \varphi_{\text{surj}}$.
- (c) Is it true that $\varphi_{\text{inj}}, \varphi_{\text{surj}} \vdash \varphi_{\text{invol}}$? Justify your answer.

11 Recall that a theory Γ is called *complete* if for every formula φ , either $\Gamma \vdash \varphi$ or $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

- (a) Show that any inconsistent theory is complete.
- (b) Give an example of a theory that is *not* complete. Justify your answer.
- (c) Show that any maximally consistent theory is complete.

———— End of exam ————

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1 Härled, eller ge en motmodell till, vardera av följande:

- (a) $P_1 \rightarrow \neg P_2 \vdash P_2 \rightarrow \neg P_1$
- (b) $P_1 \vee (P_2 \wedge P_3) \vdash (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3)$

2 Ange de fria variablerna i följande formler:

- (a) $\exists x_2 f_1(x_1) \doteq x_2$
- (b) $(\forall x_3 P_{10}(x_7)) \rightarrow (\exists x_7 P_{10}(x_3))$

3 Låt $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ vara tolkningarna som definierats enligt följande:

i	$P_1^{\mathcal{V}_i}$	$P_2^{\mathcal{V}_i}$	$P_3^{\mathcal{V}_i}$
1	0	0	1
2	1	1	1
3	1	0	1

- (a) Ge en formel som gäller i \mathcal{V}_1 och \mathcal{V}_2 , men inte i \mathcal{V}_3
 - (b) Ge en formel som gäller i $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, och \mathcal{V}_3 , men som inte är en tautologi.
- 4 (a) Ange två olika satslogiska formler φ, ψ , så att $\varphi \approx \psi$.
(b) Visa att för alla formler φ, ψ , om $\varphi \approx \psi$ så $\vdash \varphi \rightarrow \psi$.
- 5 Visa att för varje formel φ ,

$$\vdash (\exists x_1 \neg \varphi) \rightarrow (\neg \forall x_1 \varphi).$$

6 Arbeta med ställighetstypen $\langle 2; \rangle$ (en enda tvåställig relationssymbol). Låt \mathcal{N} vara strukturen $\langle \mathbb{N}; <; \rangle$, och låt $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vara värderingen med $v(i) = 0$ för varje i , d.v.s. så att alla variabler värderas som $0 \in \mathbb{N}$.

Beräkna följande sanningsvärden:

- (a) $\llbracket P_1(x_1, x_2) \rightarrow P_1(x_2, x_1) \rrbracket^{\mathcal{N}, v}$
- (b) $\llbracket \forall x_1 (P_1(x_1, x_2) \rightarrow P_1(x_2, x_1)) \rrbracket^{\mathcal{N}, v}$

7 Är formeln $(\exists x_1 P_1(x_1)) \rightarrow (\forall x_1 P_1(x_1))$ en tautologi? Motivera ditt svar.

Problemdel

8 Här är en möjlig alternativ version av eliminationsregeln för \vee :

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \varphi \rightarrow \sigma \quad \psi \rightarrow \sigma}{\sigma} \vee E\text{-ALT}$$

i vilken φ, ψ, σ kan vara godtyckliga formler. Observera att till skillnad från den vanliga $\vee E$ -regeln, den avslutar inga antaganden.

Om den här regeln hade inkluderats i reglerna för naturlig deduktion, så skulle vi behöva ett till fall i det induktiva beviset av sundhetssatsen. Ange det fallet.

9 Över ställighetstypen $\langle ; 2 \rangle$ (dvs. en enda tvåställig funktionssymbol), betrakta strukturerna $\langle \mathbb{N}; ; + \rangle$ och $\langle \mathbb{N}; ; \times \rangle$: de naturliga talen, med operationen addition respektive multiplikation.

- (a) Ge en sluten formel som gäller i $\langle \mathbb{N}; ; + \rangle$, men inte i $\langle \mathbb{N}; ; \times \rangle$.
- (b) Ge en sluten formel som gäller i både $\langle \mathbb{N}; ; + \rangle$ och $\langle \mathbb{N}; ; \times \rangle$, men inte är en tautologi.

(Påminn att en formel kallas för sluten om den har inga fria variabler.)

10 Vi definierar formlerna $\varphi_{\text{inj}}, \varphi_{\text{surj}}, \varphi_{\text{invol}}$ enligt följande:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{inj}} &:= \forall x_0, x_1 (f_1(x_0) \doteq f_1(x_1) \rightarrow x_0 \doteq x_1) \\ \varphi_{\text{surj}} &:= \forall x_0 \exists x_1 (f_1(x_1) \doteq x_0) \\ \varphi_{\text{invol}} &:= \forall x_0 (f_1(f_1(x_0)) \doteq x_0)\end{aligned}$$

- (a) Visa att $\varphi_{\text{invol}} \vdash \varphi_{\text{inj}}$.
- (b) Visa att $\varphi_{\text{inj}} \not\vdash \varphi_{\text{surj}}$.
- (c) Gäller det att $\varphi_{\text{inj}}, \varphi_{\text{surj}} \vdash \varphi_{\text{invol}}$? Motivera ditt svar.

11 Påminn att en teori Γ kallas för *fullständig* om för varje formel φ , antingen $\Gamma \vdash \varphi$ eller $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

- (a) Visa att om en teori är inkonsistent, så är den fullständig.
- (b) Ange ett exempel på en teori som *inte* är fullständig. Motivera svaret.
- (c) Visa att om en teori är maximalt konsistent, så är den fullständig.

———— Slut på provet ————