STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Errol Yuksel
och Gabriel Saadia

Exam / Tentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2025
Lördag, 2025-05-24

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 7 problems (1–7), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 5 problems (8–12), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points. The questions are provided both in English (pp. 2–3) and Swedish (pp. 4–5).

You may submit your answers in either English or Swedish.

No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All answers should be fully justified (unless stated otherwise). You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

Written Exam (English)

Basic part

1. Which of the following hold? Justify your answers.

   (a) $\models (P_1 \to P_2) \to P_2$

   (b) $P_1 \vee (P_2 \to P_3) \models (P_1 \vee P_2) \to (P_1 \wedge P_3)$

   (c) $P_1 \vee P_2 \models ((P_1 \to P_3) \vee (P_2 \to P_3)) \to P_3$

2. Give (without justification) the free variables of the following formulas:

   (a) $\forall x_2 \exists x_3 \, (P_2(x_1, x_2) \to x_2 \doteq f_2(x_1, x_3))$

   (b) $((\forall x_1 \exists x_2 P_1(x_1, x_2)) \wedge P_2(f_1(x_1, x_5))) \to \forall x_1 \, (\exists x_2 P_1(x_1, x_2) \wedge P_2(f_1(x_1, x_5)))$

3. Give derivations in tree form justifying the following.

   (a) $\neg P_1 \vee P_2 \vdash P_1 \to P_2$

   (b) $P_1 \to P_2 \vdash \neg P_1 \vee P_2$

4. Recall that a derivation $\mathcal{D}$ is *sound* if the conclusion of $\mathcal{D}$ holds in every interpretation in which the undischarged assumptions of $\mathcal{D}$ hold. During the proof of the soundness theorem we showed that every derivation $\mathcal{D}$ is sound by induction on $\mathcal{D}$.

   (a) Give the case in that induction for the rule $\to$ E.

   (b) Give the case in that induction for the rule $\exists$ I.

   You may refer, if necessary, to the following substitution lemma: Let φ be a formula, x_i a variable, and t a term that is free for x_i in φ. Then for any structure $\mathcal{A}$ and valuation ν for $\mathcal{A}$,

   $$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},\nu} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},\nu[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},\nu}]}$$

5. Give propositional formulas φ_0, φ_1 and φ_2 such that the theories

   $$\{\varphi_0, \varphi_1\},\ \{\varphi_0, \varphi_2\},\ \text{and } \{\varphi_1, \varphi_2\}$$

   are consistent, but $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ is not.

6. Show that for any theory Γ and formula φ of predicate logic, $\Gamma \vdash \varphi$ if and only if $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$.

7. Which of the following hold? For each, give a derivation or a countermodel.

   (a) $\exists x_0 P_2(x_0) \vdash \exists x_0 (P_1(x_0) \to P_2(x_0))$

   (b) $\forall x_0 (P_1(x_0) \vee P_2(x_0)) \vdash (\forall x_0 P_1(x_0)) \vee (\forall x_0 P_2(x_0))$

Problem part

8. Show that the theory

$$\{\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 (x_3 \doteq x_1 \vee x_3 \doteq x_2),\ \forall x_1 \left(P_1(x_1) \to \neg P_1(f_1(x_1))\right),\ \exists x_1 P_1(x_1)\}$$

is consistent.

9. Give a derivation in tree form showing the following:

$$(\exists x_0 P_1(x_0)) \to (\exists x_0 P_2(x_0)) \vdash \exists x_0 (P_1(x_0) \to P_2(x_0)).$$

(*Hint: Start with a derivation of* $P_1(x_0) \vee \neg P_1(x_0)$ *and use the* $\vee E$ *rule on it.*)

10. Which of the following statements are true? Justify your answers.

  (a) If Γ_1, Γ_2 are consistent theories, then $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ is consistent.
  (b) If Γ_1, Γ_2 are consistent theories, then $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ is consistent.
  (c) If $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is an increasing chain of consistent theories (i.e. each Γ_n is consistent, and $\Gamma_n \subseteq \Gamma_m$ for all $n < m \in \mathbb{N}$), then the union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ is consistent.
  (d) If Γ_1, Γ_2 are maximally consistent theories, then $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ is maximally consistent.

11. Fix the arity type $\langle\ ; 0, 1\rangle$ and consider the structure

$$\mathcal{N} := \langle \mathbb{N};\ ; 0, s\rangle$$

where s is the function $x \mapsto x + 1$. Let ν be any valuation on $\mathcal{N}$ and consider the theory of $\mathcal{N}, \nu$

$$\mathrm{Th}(\mathcal{N}, \nu) = \{\varphi \text{ formula} \mid \mathcal{N}, \nu \vDash \varphi\}.$$

Show that $\mathrm{Th}(\mathcal{N}, \nu)$ has the existence property.

You may use without justification the following: if t is any term in which no variables occur, φ any formula, and x_i any variable, then t is free for x_i in φ.

12. Fix the arity type $\langle 2; 0, 2\rangle$ and consider the structure $\mathcal{Q} := \langle \mathbb{Q}; <; 1, +\rangle$.

  (a) For each natural number $n > 0$, give a formula φ_n whose only free variable is x_0, and which holds in $\mathcal{Q}, \nu$ if and only if $\nu(x_0)$ is strictly less than $\frac{1}{n}$.
  (b) Consider the theory of $\mathcal{Q}$:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{Q}) := \{\varphi \text{ formula with no free variables } \mid \mathcal{Q} \vDash \varphi\}.$$

  Let φ_0 be the formula $P_1(f_1, f_2(x_0, f_1))$ (which expresses that $\nu(x_0) > 0$). Show that the theory

$$\mathrm{Th}(\mathcal{Q}) \cup \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$$

  has a model. (*Hint: use the compactness theorem.*)
  (c) Show that there is no valuation ν on $\mathcal{Q}$ such that $\mathcal{Q}, \nu \vDash \varphi_n$ for all $n \geq 0$.

——— End of exam ———

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1. Vilka av följande gäller? Motivera svaren.

   (a) $\models (P_1 \to P_2) \to P_2$

   (b) $P_1 \vee (P_2 \to P_3) \models (P_1 \vee P_2) \to (P_1 \wedge P_3)$

   (c) $P_1 \vee P_2 \models ((P_1 \to P_3) \vee (P_2 \to P_3)) \to P_3$

2. Ange (utan motivering) de fria variablerna i följande formler:

   (a) $\forall x_2 \exists x_3 (P_2(x_1, x_2) \to x_2 \doteq f_2(x_1, x_3))$

   (b) $((\forall x_1 \exists x_2 P_1(x_1, x_2)) \wedge P_2(f_1(x_1, x_5))) \to \forall x_1 (\exists x_2 P_1(x_1, x_2) \wedge P_2(f_1(x_1, x_5)))$

3. Ange härledningar i trädform som motiverar följande.

   (a) $\neg P_1 \vee P_2 \vdash P_1 \to P_2$

   (b) $P_1 \to P_2 \vdash \neg P_1 \vee P_2$

4. Kom ihåg att en härledning $\mathcal{D}$ är *sund* om slutformeln av $\mathcal{D}$ är sann i alla tolkningar där de oavslutade antagandena av $\mathcal{D}$ är sanna. Under beviset av sundhetssatsen bevisade vi att varje härledning $\mathcal{D}$ är sund med induktion över $\mathcal{D}$.

   (a) Ge fallet i detta induktionsbevis för regeln $\to$ E.

   (b) Ge fallet i detta induktionsbevis för regeln $\exists$ I.

   Du får hänvisa vid behov till följande substitutionslemma: Låt φ vara en formel, x_i en variabel, och t en term som är fri för x_i i φ. För vilken som helst struktur $\mathcal{A}$ och värdering ν för $\mathcal{A}$,

   $$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},\nu} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},\nu[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},\nu}]}$$

5. Änge satslogiska formler φ_0, φ_1 and φ_2 så att teorierna

   $$\{\varphi_0, \varphi_1\},\ \{\varphi_0, \varphi_2\},\ \text{och}\ \{\varphi_1, \varphi_2\}$$

   är konsistenta, men $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ inte är det.

6. Visa att för varje predikatlogisk teori Γ och formel φ, vi har att $\Gamma \vdash \varphi$ om och endast om $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$.

7. Vilka av följande gäller? För var och en, ange en härledning eller en motmodell.

   (a) $\exists x_0 P_2(x_0) \vdash \exists x_0 (P_1(x_0) \to P_2(x_0))$

   (b) $\forall x_0 (P_1(x_0) \vee P_2(x_0)) \vdash (\forall x_0 P_1(x_0)) \vee (\forall x_0 P_2(x_0))$

Problemdel

8. Visa att teorin

$$\{\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 (x_3 \doteq x_1 \vee x_3 \doteq x_2),\ \forall x_1 \left(P_1(x_1) \to \neg P_1(f_1(x_1))\right),\ \exists x_1 P_1(x_1)\}$$

är konsistent.

9. Ange härledningar på trädform som visar:

$$(\exists x_0 P_1(x_0)) \to (\exists x_0 P_2(x_0)) \vdash \exists x_0 (P_1(x_0) \to P_2(x_0)).$$

(*Tips: Börja med en härledning av* $P_1(x_0) \vee \neg P_1(x_0)$ *och använda* $\vee E$ *regeln på den.*)

10. Vilka av följande påståenden är sanna? Motivera dina svar.

    (a) Om Γ_1, Γ_2 är konsistenta teorier, så är $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ konsistent.

    (b) Om Γ_1, Γ_2 är konsistenta teorier, så är $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ konsistent.

    (c) Om $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ är en växande kedja av konsistenta teorier (dvs varje Γ_n är konsistent, och $\Gamma_n \subseteq \Gamma_m$ för alla $n < m \in \mathbb{N}$), så är unionen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ konsistent.

    (d) Om Γ_1, Γ_2 är maximalt konsistenta teorier, så är $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ maximalt konsistent.

11. Fixa ställighetstypen $\langle\ ; 0, 1\rangle$ och betrakta strukturen

$$\mathcal{N} := \langle \mathbb{N};\ ; 0, s\rangle$$

var s är funktionen $x \mapsto x + 1$. Låt ν vara vilken värdering på $\mathcal{N}$ som helst och betrakta teorien av $\mathcal{N}, \nu$

$$\mathrm{Th}(\mathcal{N}, \nu) = \{\varphi \text{ formel} \mid \mathcal{N}, \nu \vDash \varphi\}.$$

Visa att $\mathrm{Th}(\mathcal{N}, \nu)$ har existensegenskapen.

Du får använda utan motivering följande lemma: om t *är vilken term som helst där inga variabler förekommer,* φ *är vilken formel som helst, och* x_i *är vilken variabel som helst, då är* t *fri för* x_i *i* φ.

12. Fixa ställighetstypen $\langle 2; 0, 2\rangle$ och betrakta strukturen $\mathcal{Q} := \langle \mathbb{Q}; <; 1, +\rangle$.

    (a) För varje naturligt tal $n > 0$, ge en formel φ_n vars enda fria variabel är x_0, och som är sann i $\mathcal{Q}, \nu$ om och endast om $\nu(x_0)$ är strikt mindre än $\frac{1}{n}$.

    (b) Betrakta teorin av $\mathcal{Q}$:

    $$\mathrm{Th}(\mathcal{Q}) := \{\varphi \text{ formel utan fria variabler } \mid \mathcal{Q} \vDash \varphi\}.$$

    Låt φ_0 vara formeln $P_1(f_1, f_2(x_0, f_1))$ (vilken uttrycker att $\nu(x_0) > 0$). Visa att teorien

    $$\mathrm{Th}(\mathcal{Q}) \cup \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$$

    har en modell. (*Tips: använd kompakthetssatsen.*)

    (c) Visa att det inte finns någon värdering ν på $\mathcal{Q}$ så att $\mathcal{Q}, \nu \vDash \varphi_n$ för alla $n \geq 0$.

——— Slut på provet ———