

**STOCKHOLMS UNIVERSITET**

Matematiska institutionen

Errol Yuksel

Gabriel Saadia

Re-exam / Omtentamen

MM5024 Logik 7,5 hp

Spring 2025 / VT 2025

Fredag, 2025-08-22

*This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 6 problems (1–6), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 3 problems (7–9), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points. The questions are provided both in English (pp. 2–3) and Swedish (pp. 4–5).*

*You may submit your answers in either English or Swedish. No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All answers should be fully justified (unless stated otherwise). You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.*

## Written Exam (English)

### Basic part

1. State carefully the following natural deduction rules (including any necessary conditions):

- (a)  $\wedge I$
- (b)  $\forall E$
- (c)  $RAA$

2. Find the free variables of the following formulas.

- (a)  $(\forall x_2 P_3(x_2)) \wedge \neg P_1(f_1(x_2))$
- (b)  $\exists x_{14} \exists x_{21} P_7(x_{14}, x_{21}, x_{28})$

3. Let  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$  be the interpretations defined as follows:

| $i$ | $P_1^{\mathcal{V}_i}$ | $P_2^{\mathcal{V}_i}$ |
|-----|-----------------------|-----------------------|
| 1   | 1                     | 1                     |
| 2   | 1                     | 0                     |
| 3   | 0                     | 1                     |

- (a) Give a formula which holds in  $\mathcal{V}_3$ , but not in either  $\mathcal{V}_1$  or  $\mathcal{V}_2$ .
  - (b) Give a formula which holds in  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ , and  $\mathcal{V}_3$ , but is not a tautology.
4. Work over the arity type  $\langle 2; \rangle$  (a single binary function symbol  $f_1$ ). Let  $\mathcal{N}$  be the structure  $\langle \mathbb{N}; +; \rangle$ , and let  $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  be the valuation with  $v(i) = 1$  for all  $i$ , i.e. interpreting free variables as  $1 \in \mathbb{N}$ .

Compute the following truth-values:

- (a)  $\llbracket \forall x_1 \exists x_2 (x_1 \doteq f_1(x_2, x_2) \vee x_1 \doteq f_1(f_1(x_2, x_2), x_{2025})) \rrbracket^{\mathcal{N}, v}$
- (b)  $\llbracket \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 (x_1 \doteq f_1(x_2, x_3)) \rrbracket^{\mathcal{N}, v}$

5. Which of the following hold? For each, give a derivation or a countermodel.

- (a)  $P_1 \wedge P_2 \vdash ((P_1 \rightarrow P_3) \vee (P_2 \rightarrow P_3)) \rightarrow P_3$
- (b)  $\vdash (((P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow P_1)) \rightarrow P_1$

6. Let  $\varphi$  be any formula. Give a derivation showing

$$\vdash (\forall x_1 \neg \varphi) \rightarrow (\neg \exists x_1 \varphi).$$

### Problem part

7 Recall: a formula is *closed* if it has no free variables.

- (a) Work over the arity type  $\langle ; 2 \rangle$  (a single binary relation symbol  $P_1$ ).  
Let  $\mathcal{N}_{\leq}$  be the structure  $\langle \mathbb{N}; ; \leq \rangle$  and  $\mathcal{N}_{\geq}$  be the structure  $\langle \mathbb{N}; ; \geq \rangle$ . Give a closed formula which holds in  $\mathcal{N}_{\leq}$  but not in  $\mathcal{N}_{\geq}$ . Justify your answer.
- (b) Work over the arity type  $\langle 2; \rangle$  (a single binary function symbol  $f_1$ ).  
Let  $\mathcal{N}_{\min}$  be the structure  $\langle \mathbb{N}; \min; \rangle$  and  $\mathcal{N}_{\max}$  be the structure  $\langle \mathbb{N}; \max; \rangle$ .  
Give a closed formula which holds in  $\mathcal{N}_{\max}$  but not in  $\mathcal{N}_{\min}$ . Justify your answer.
- (c) Work over the arity type  $\langle ; 2 \rangle$  (a single binary relation symbol  $P_1$ ).  
Let  $\varphi$  be the formula

$$\forall x_1 \forall x_2 (P_1(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_3 (P_1(x_1, x_3) \wedge P_1(x_3, x_2)))$$

and  $\psi$  be the formula

$$(\exists x_1 P_1(x_1, x_1)) \vee (\forall x_1 \forall x_2 \neg P_1(x_1, x_2)).$$

Give a structure in which  $\varphi$  holds but  $\psi$  does not.

8 Recall: a theory  $\Gamma$  is *complete* if for every formula  $\varphi$ , either  $\Gamma \vdash \varphi$  or  $\Gamma \vdash \neg\varphi$ .

- (a) Show that the theory  $\{P_1 \rightarrow P_2\}$  is not complete.
- (b) Show that any maximally consistent theory is complete.
- (c) Show that there exists a complete theory that is not maximally consistent.

9 Consider the arity type  $\langle 1, 0, 0; \rangle$ : a unary function symbol  $f_1$  and two constant symbols  $f_2, f_3$ . Let  $\Gamma$  be the theory given by the closed formulas

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x_1, x_2 (f_1(x_1) \doteq f_1(x_2) \rightarrow x_1 \doteq x_2) \\ \varphi_2 &:= f_1(f_2) \doteq f_2 \\ \varphi_3 &:= \neg f_1(f_3) \doteq f_3\end{aligned}$$

- (a) Show that  $\Gamma \vdash \neg(f_2 \doteq f_3)$ .
- (b) Show that  $\Gamma \cup \{\neg \exists x_1 f_1(x_1) \doteq f_3\}$  is consistent.
- (c) Is it true that  $\Gamma \vdash \exists x_1 \neg(f_1(f_1(x_1)) \doteq x_1)$ ? Justify your answer!

——— End of exam ———

## Skriftligt prov (Svenska)

### Grundläggande del

1. Ange noggrant följande regler för naturlig deduktion (inklusive alla nödvändiga restriktioner):

- (a)  $\wedge I$
- (b)  $\forall E$
- (c)  $RAA$

2. Hitta de fria variablerna i följande formler.

- (a)  $(\forall x_2 P_3(x_2)) \wedge \neg P_1(f_1(x_2))$
- (b)  $\exists x_{14} \exists x_{21} P_7(x_{14}, x_{21}, x_{28})$

3. Låt  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$  vara tolkningarna som definierats enligt följande:

| $i$ | $P_1^{\mathcal{V}_i}$ | $P_2^{\mathcal{V}_i}$ |
|-----|-----------------------|-----------------------|
| 1   | 1                     | 1                     |
| 2   | 1                     | 0                     |
| 3   | 0                     | 1                     |

- (a) Ge en formel som gäller i (d.v.s., som är sann i)  $\mathcal{V}_3$ , men i varken  $\mathcal{V}_1$  eller  $\mathcal{V}_2$ .
- (b) Ge en formel som gäller i  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ , och  $\mathcal{V}_3$ , men som inte är en tautologi.

4. Arbeta med ställighetstypen  $\langle 2; \rangle$  (en enda tvåställig funktionssymbol  $f_1$ ). Låt  $\mathcal{N}$  vara strukturen  $\langle \mathbb{N}; +; \rangle$ , och låt  $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  vara värderingen med  $v(i) = 1$  för varje  $i$ , d.v.s. så att fria variabler värderas som  $1 \in \mathbb{N}$ .

Beräkna följande sanningsvärden:

- (a)  $\llbracket \forall x_1 \exists x_2 (x_1 \doteq f_1(x_2, x_2) \vee x_1 \doteq f_1(f_1(x_2, x_2), x_{2025})) \rrbracket^{\mathcal{N}, v}$
- (b)  $\llbracket \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 (x_1 \doteq f_1(x_2, x_3)) \rrbracket^{\mathcal{N}, v}$

5. Vilka av följande gäller? För var och en, ange en härledning eller en motmodell.

- (a)  $P_1 \wedge P_2 \vdash ((P_1 \rightarrow P_3) \vee (P_2 \rightarrow P_3)) \rightarrow P_3$
- (b)  $\vdash (((P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow P_1)) \rightarrow P_1$

6. Låt  $\varphi$  vara en godtycklig formel. Ge en härledning som visar

$$\vdash (\forall x_1 \neg \varphi) \rightarrow (\neg \exists x_1 \varphi).$$

## Problemdel

7 Påminn: en formel är *sluten* om den har inga fria variabler.

- (a) Arbeta med ställighetstypen  $\langle ; 2 \rangle$  (en enda tvåställig relationssymbol  $P_1$ ).  
Låt  $\mathcal{N}_{\leq}$  vara strukturen  $\langle \mathbb{N}; ; \leq \rangle$  och  $\mathcal{N}_{\geq}$  vara strukturen  $\langle \mathbb{N}; ; \geq \rangle$ . Ge en sluten formel som gäller i  $\mathcal{N}_{\leq}$  men inte i  $\mathcal{N}_{\geq}$ . Motivera ditt svar.
- (b) Arbeta med ställighetstypen  $\langle 2; \rangle$  (en enda tvåställig funktionssymbol  $f_1$ ).  
Låt  $\mathcal{N}_{\min}$  vara strukturen  $\langle \mathbb{N}; \min; \rangle$  och  $\mathcal{N}_{\max}$  vara strukturen  $\langle \mathbb{N}; \max; \rangle$ .  
Ge en sluten formel som gäller i  $\mathcal{N}_{\max}$  men inte i  $\mathcal{N}_{\min}$ . Motivera ditt svar.
- (c) Arbeta med ställighetstypen  $\langle ; 2 \rangle$  (en enda tvåställig relationssymbol  $P_1$ ).  
Låt  $\varphi$  vara formeln

$$\forall x_1 \forall x_2 (P_1(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_3 (P_1(x_1, x_3) \wedge P_1(x_3, x_2)))$$

och  $\psi$  vara formeln

$$(\exists x_1 P_1(x_1, x_1)) \vee (\forall x_1 \forall x_2 \neg P_1(x_1, x_2)).$$

Ge en struktur där  $\varphi$  gäller men  $\psi$  inte gör det.

8 Påminn: en teori  $\Gamma$  kallas *fullständig* om för varje formel  $\varphi$ , antingen  $\Gamma \vdash \varphi$  eller  $\Gamma \vdash \neg\varphi$ .

- (a) Visa att teorin  $\{P_1 \rightarrow P_2\}$  inte är fullständig.
- (b) Visa att varje maximalt konsistent teori är fullständig.
- (c) Visa att det finns en fullständig teori som inte är maximalt konsistent.

9 Betrakta ställighetstypen  $\langle 1, 0, 0; \rangle$ : en unär funktionsymbol  $f_1$  och två konstantsymboler  $f_2, f_3$ . Låt  $\Gamma$  vara teorin given av de slutna formlerna

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x_1, x_2 (f_1(x_1) \doteq f_1(x_2) \rightarrow x_1 \doteq x_2) \\ \varphi_2 &:= f_1(f_2) \doteq f_2 \\ \varphi_3 &:= \neg f_1(f_3) \doteq f_3\end{aligned}$$

- (a) Visa att  $\Gamma \vdash \neg(f_2 \doteq f_3)$ .
- (b) Visa att  $\Gamma \cup \{\neg \exists x_1 f_1(x_1) \doteq f_3\}$  är konsistent.
- (c) Är det sant att  $\Gamma \vdash \exists x_1 \neg(f_1(f_1(x_1)) \doteq x_1)$ ? Redovisa ditt svar!

—— Slut på provet ——