

STOCKHOLMS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Peter LeFanu Lumsdaine

Gabriel Saadia

Exam / Tentamen

MM5024 Logik 7,5 hp

VT2026

Friday 2026-05-29

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 7 problems (1–7), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 4 problems (8–11), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points. The questions are provided both in English (pp. 2–3) and Swedish (pp. 4–5).

You may submit your answers in either English or Swedish.

No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All answers should be fully justified (unless stated otherwise). You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

Good luck! — Lycka till!

Basic part

1. State carefully the following natural deduction rules (including any necessary conditions):

- (a) $\vee$ -introduction (b) $\rightarrow$ -introduction (c) RAA

2. Which of the following formulas are tautologies? Justify your answers.

- (a) $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow (P_1 \vee P_2)$ (b) $(P_1 \vee P_2) \rightarrow (P_1 \wedge P_2)$

3. For each of the following derivations, is it a correct, normal derivation showing that $P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_3, \neg\neg P_1 \vdash P_3$? If not, why not?

(a)

$$\frac{\frac{\frac{P_2 \rightarrow P_3}{P_2} \rightarrow E \quad \frac{P_1 \rightarrow P_2 \quad [P_1]^1}{P_2} \rightarrow E}{P_3} \rightarrow I^1 \quad \frac{\frac{\neg\neg P_1 \quad [\neg P_1]^2}{\perp} RAA^2 \quad \frac{\perp}{P_1} RAA^2}{P_3} \rightarrow E$$

(b)

$$\frac{\frac{\frac{P_2 \rightarrow P_3}{P_2} \rightarrow E \quad \frac{P_1 \rightarrow P_2}{P_1} \rightarrow E}{P_3} \rightarrow E \quad \frac{\frac{\neg\neg P_1 \quad [\neg P_1]^1}{\perp} RAA^1 \quad \frac{\perp}{P_1} RAA^1}{P_3} \rightarrow E$$

4. Let φ be the formula $P_1(x_1, x_2) \vee \exists x_2 \neg P_1(x_1, x_2)$.

- (a) Give the free variables of φ .
(b) Compute the result of the substitution $\varphi[f_{17}(x_5)/x_2]$.

5. Give a derivation showing

$$\vdash \forall x_1, x_2 ((P_1(x_1) \wedge x_1 \doteq x_2) \rightarrow P_1(x_2))$$

6. Work for this question in predicate logic. The *model existence lemma* is the statement that every consistent theory has a model. The *completeness theorem* is the statement that for all $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}$, if $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, then $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$.

Show that the model existence lemma implies the completeness theorem.

7. Work over the arity type $\langle ; 2 \rangle$ (a single binary relation symbol). Let $\mathcal{A}$ be the structure $\langle \{1, 2, 3\} ; \leq \rangle$, where $\leq$ is the usual ordering, and let $v : \mathbb{N} \rightarrow |\mathcal{A}|$ be the valuation with $v(i) = 1$ for all i , i.e. such that $\llbracket x_i \rrbracket^{\mathcal{A}, v} = 1 \in \{1, 2, 3\}$ for every variable x_i .

Compute the following truth-values:

- (a) $\llbracket \forall x_2 (P_1(x_2, x_1) \rightarrow P_1(x_1, x_2)) \rrbracket^{\mathcal{A}, v}$
(b) $\llbracket \forall x_2 (P_1(x_1, x_2) \rightarrow P_1(x_2, x_1)) \rrbracket^{\mathcal{A}, v}$

Problem part

8. Show that for any theory Γ and formulas φ, ψ, σ , if there are RAA-free derivations showing

- (i) $\Gamma, \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \perp$ (ii) $\Gamma, \varphi, \neg\sigma \vdash \perp$ (iii) $\Gamma, \psi, \neg\sigma \vdash \perp$

then there is some RAA-free derivation of $\Gamma, \neg\sigma \vdash \perp$. (*This is the case for $\vee E$ in the proof of Glivenko's theorem.*)

9. Which of the following formulas are derivable without undischarged assumptions? For each, give a derivation or a countermodel.

- (a) $\forall x_1, x_2, x_3 (x_1 \doteq x_2 \rightarrow f_1(x_1, x_3) \doteq f_1(x_2, x_3))$
 (b) $(\forall x_1, x_2 f_1(x_1, x_2) \doteq f_1(x_2, x_1)) \rightarrow (\forall x_1, x_2, x_3 f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)) \doteq f_1(f_1(x_3, x_2), x_1))$
 (c) $(\forall x_1 \exists x_2 f_1(x_2) \doteq x_1) \rightarrow (\exists x_1 \forall x_2 f_1(x_2) \doteq x_1)$

10. Consider the structure $\mathcal{A} := \langle \mathbb{Z} ; ; \times \rangle$, for the arity type $\langle ; 2 \rangle$ (i.e. with just a single binary function in the language, no basic predicates or constant symbols).

Give formulas over this arity type representing the following predicates on $\mathcal{A}$:

- (a) “ $x_1 = 1$ ”
 (b) “ x_1 is a perfect square”
 (c) “ $x_1 = -1$ ”

That is, the formula for (a) should hold in $\mathcal{A}$ with any valuation v if and only if $\llbracket x_1 \rrbracket^{\mathcal{A}, v} = 1$, and so on. (*You do not need to justify that your formulas represent these predicates.*)

11. Recall that a theory Γ is called *complete* if for every formula φ , either $\Gamma \vdash \varphi$ or $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

- (a) Show that any inconsistent theory is complete.
 (b) Give an example of a theory that is *not* complete. Justify your answer.
 (c) Show that any maximally consistent theory is complete.

—— End of exam ——

Grundläggande del

1. Ange noggrant följande regler för naturlig deduktion (inklusive alla nödvändiga restriktioner):

- (a) $\vee$ -introduktion (b) $\rightarrow$ -introduktion (c) RAA

2. Vilken av följande formler är tautologier? Motivera svaren.

- (a) $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow (P_1 \vee P_2)$ (b) $(P_1 \vee P_2) \rightarrow (P_1 \wedge P_2)$

3. För vardera av följande härledningar, är det en korrekt, normal härledning som visar att $P_1 \rightarrow P_2$, $P_2 \rightarrow P_3$, $\neg\neg P_1 \vdash P_3$? Om inte, varför inte?

- (a)
- $$\frac{\frac{P_2 \rightarrow P_3 \quad \frac{P_1 \rightarrow P_2 \quad [P_1]^1 \rightarrow E}{P_2} \rightarrow E}{P_3} \rightarrow I^1 \quad \frac{\neg\neg P_1 \quad [\neg P_1]^2 \rightarrow E}{\perp} RAA^2}{P_1 \rightarrow P_3} \rightarrow E$$

- (b)
- $$\frac{P_2 \rightarrow P_3 \quad \frac{P_1 \rightarrow P_2 \quad \frac{\neg\neg P_1 \quad [\neg P_1]^1 \rightarrow E}{\perp} RAA^1}{P_2} \rightarrow E}{P_3} \rightarrow E$$

4. Låt φ vara formeln $P_1(x_1, x_2) \vee \exists x_2 \neg P_1(x_1, x_2)$.

- (a) Ange de fria variablerna av φ .
 (b) Beräkna resultatet av substitutionen $\varphi[f_{17}(x_5)/x_2]$.

5. Ge en härledning som visar

$$\vdash \forall x_1, x_2 ((P_1(x_1) \wedge x_1 \doteq x_2) \rightarrow P_1(x_2))$$

6. I denna fråga arbetar vi med predikatlogik. *Modell-existens-lemmat* är påståendet att varje konsistent teori har en modell. *Fullständighetssatsen* är påståendet att för alla $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \in$, om $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, då $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$.

Visa att modell-existens-lemmat medför fullständighetssatsen.

7. Arbeta med ställighetstypen $\langle ; 2 \rangle$ (en enda tvåställig relationssymbol). Låt $\mathcal{A}$ vara strukturen $\langle \{1, 2, 3\}; ; \leq \rangle$, där $\leq$ är den vanliga ordningen, och låt $v : \mathbb{N} \rightarrow |\mathcal{A}|$ vara värderingen med $v(i) = 1$ för alla i , d.v.s. så att $\llbracket x_i \rrbracket^{\mathcal{A}, v} = 1 \in \{1, 2, 3\}$ för varje variabel x_i .

Beräkna följande sanningsvärden:

- (a) $\llbracket \forall x_2 (P_1(x_2, x_1) \rightarrow P_1(x_1, x_2)) \rrbracket^{\mathcal{A}, v}$
 (b) $\llbracket \forall x_2 (P_1(x_1, x_2) \rightarrow P_1(x_2, x_1)) \rrbracket^{\mathcal{A}, v}$

Problemdel

8. Visa att för varje teori Γ och formler φ, ψ, σ , om det finns RAA-fria härledningar som visar att

$$(i) \quad \Gamma, \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \perp \qquad (ii) \quad \Gamma, \varphi, \neg\sigma \vdash \perp \qquad (iii) \quad \Gamma, \psi, \neg\sigma \vdash \perp$$

så finns det en RAA-fri härledning av $\Gamma, \neg\sigma \vdash \perp$. (Detta är $\vee E$ -fallet i beviset av Glivenkos sats.)

9. Vilka av följande formler kan härledas utan oavslutade antaganden? För var och en, ange en härledning eller en motmodell.

- (a) $\forall x_1, x_2, x_3 (x_1 \doteq x_2 \rightarrow f_1(x_1, x_3) \doteq f_1(x_2, x_3))$
- (b) $(\forall x_1, x_2 f_1(x_1, x_2) \doteq f_1(x_2, x_1)) \rightarrow (\forall x_1, x_2, x_3 f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)) \doteq f_1(f_1(x_3, x_2), x_1))$
- (c) $(\forall x_1 \exists x_2 f_1(x_2) \doteq x_1) \rightarrow (\exists x_1 \forall x_2 f_1(x_2) \doteq x_1)$

10. Låt $\mathcal{A}$ vara strukturen $\langle \mathbb{Z}; \cdot; \times \rangle$, för ställighetstypen $\langle ; 2 \rangle$ (d.v.s. bara en enda tvåställig funktion, inga relationssymboler eller konstantsymboler).

Ge formler över denna ställighetstyp som representerar följande predikat på $\mathcal{A}$:

- (a) “ $x_1 = 1$ ”
- (b) “ x_1 är ett kvadrattal”
- (c) “ $x_1 = -1$ ”

Det vill säga, formeln för (a) ska gälla i $\mathcal{A}$ med någon värdering v om och bara om $\llbracket x_1 \rrbracket^{\mathcal{A}, v} = 1$, och så vidare. (Ni behöver inte att redovisa noggrant att era formler representerar dessa predikat.)

11. Påminn att en teori Γ kallas för *fullständig* om för varje formel φ , antingen $\Gamma \vdash \varphi$ eller $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

- (a) Visa att om en teori är inkonsistent, så är den fullständig.
- (b) Ange ett exempel på en teori som *inte* är fullständig. Motivera svaret.
- (c) Visa att om en teori är maximalt konsistent, så är den fullständig.

— Slut på provet —