MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

2012-10-24

Övningar till Matematisk analys IV

Erik Svensson

L 1. Avgör om $f(x,y) = (1 + x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$ har något största eller minsta värde på $\mathbf{R}^2$ och ange i förekommande fall största/minsta värdet.

L 2. Bestäm de värden som funktionen $f(x,y) = (1 + 6x + 2y)e^{-x-y^2}$ antar på mängden $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$.

3. Har funktionen $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-2x+y}$ något största eller minsta värde på mängden $0 \leq y \leq x$? Bestäm också största/minsta värdet om det existerar.

L 4. Avgör om funktionen $f(x,y) = x^2y + 2xy^2 - 6xy$ har något största eller minsta värde på $x \geq 0$, $y \geq 0$, och ange i förekommande fall största/minsta värdet.

L 5. Avgör om funktionen $f(x,y) = 3x^4 - 12xy + 2y^6$ har något största eller minsta värde på $\mathbf{R}^2$ och ange i förekommande fall största/minsta värdet.

6. Avgör om funktionen $f(x,y) = (2xy + y^2)e^{-x}$ har något största eller minsta värde på $x \geq 0$ och ange i förekommande fall största/minsta värdet.

L 7. Avgör om $f(x,y) = x + y$ har något största eller minsta värde på mängden $x^3 + 3x^2y + 2y^3 = 6$, $x \geq 0$, $2y \geq x$, och bestäm i förekommande fall största/minsta värdet.

L 8. Avgör om funktionen $f(x,y) = xy$ har något största eller minsta värde på mängden $x^3 + 3xy + 8y^3 = 22$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och ange i förekommande fall största/minsta värdet.

L 9. Låt D vara mängden $x^3y + 4xy^3 = 5$, $x \geq 1$. Motivera att D är obegränsad. Motivera att funktionen $f(x,y) = xy$ har ett största men inget minsta värde på D. Bestäm största värdet och ange var största värdet antas.

10. Avgör om $f(x,y) = x^2 + y^2$ har något största eller minsta värde då $2x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3 = 1$ och ange i förekommande fall största/minsta värdet.

11. Avgör om funktionen $f(x,y,z) = (3x + 4y + 5z^2)e^{-x^2-y^2-z^2}$ har något största eller minsta värde på $\mathbf{R}^3$ och ange i förekommande fall största/minsta värdet.

12. Avgör om funktionen $f(x,y,z) = x + y + z$ har något största eller minsta värde då $(x,y,z) \in D$ och ange i förekommande fall största/minsta värdet om
a) D är mängden $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$,
b) D är mängden $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

13. Avgör om funktionen $f(x,y,z) = x + y + z$ har något största eller minsta värde på mängden $xy + yz = 1$, $xz + yz = 4$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ och ange i förekommande fall största/minsta värdet.

L 14. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}\,dx + \Big(x + \frac{e^y}{1+x^2}\Big)\,dy$$

där γ är kvartscirkeln $x^2+y^2=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$.

L 15. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (y^4 - x^3y + 1)\,dx + (4xy^3+2)\,dy$ där γ är kurvan $y = (1-x^4)^{1/4}$ från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$.

L 16. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (y + \sqrt{1+y^2})\,dx + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}\,dy$$

där γ är halvcirkeln $x^2+y^2=1$, $y \geq 0$ från punkten $(-1,0)$ till punkten $(1,0)$.

L 17. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \Big(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + y^2\Big)\,dx + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dy$$

där γ är kurvan $y = \sin \pi x$, $0 \leq x \leq 1$, från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,0)$.

L 18. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (5x^4y^{11} + y^2 + 2x, 11x^5y^{10} + 2xy + 3y^2)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ på $\mathbf{R}^2$ eller visa att en sådan potentialfunktion inte finns. Beräkna också kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ är kurvan

$$x = \frac{2t}{1+t^4}, \quad y = \frac{4t^3}{(1+t^4)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

19. Visa att kurvintegralen $\int_\gamma (3x^2y^2 + 2x)\,dx + (2x^3y + 4y^3)\,dy$ är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^2$. Vad blir kurvintegralens värde om γ är någon kurva från punkten $(1,0)$ till punkten $(2,-1)$?

L 20. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2+3y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\,dy$$

där γ är kurvan $y = -1 + (4 - (x-1)^2)^{1/4}$ från punkten $(-1,-1)$ till punkten $(3,-1)$.

L 21. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2+2xy+2y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+2xy+2y^2}\,dy$$

där γ är vägen genom tredje, andra och första kvadranten längs kurvan $x^4 + y^4 = 16$ från punkten $(0,-2)$ till punkten $(2,0)$.

22. Några optimeringsproblem för kurvintegraler i planet.

a) Bestäm supremumvärdet av de värden som kurvintegralen

$$\int_\gamma (x^2y + \frac{2}{3}y^3)\,dx + (x^2+4xy)\,dy$$

kan anta om γ är en enkel sluten positivt orienterad styckvis-C^1-kurva i planet.

b) Bestäm supremumvärdet av de värden som kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx + \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dy$$

kan anta om γ är en enkel sluten positivt orienterad styckvis-C^1-kurva i planet.

c) Bestäm supremumvärdet av de värden som kurvintegralen

$$\int_\gamma 2x^3y\,dx + x^2y\,dy$$

kan anta om γ är en C^1-funktionskurva $y = f(x)$ från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,1)$.

Ange också i vart och ett av de tre fallen om supremumvärdet antas eller ej.

23. Låt $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ vara en C^1-bijektion mellan en C^1-kurva Γ i uv-planet och en C^1-kurva γ i xy-planet. En kurvintegral längs γ i xy-planet,

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

där funktionerna P och Q är kontinuerliga på γ, kan då också skrivas som en kurvintegral längs Γ i uv-planet. Dvs för lämpliga funktioner R och S gäller att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_\Gamma R(u,v)\,du + S(u,v)\,dv.$$

Ange R och S, uttryckta i P, Q, f och g, så att ovanstående likhet alltid gäller.

L 24. Bestäm arean av den del av konytan $z = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$ som är innanför cylinderytan $x^2+2y^2 = 1$.

L 25. Bestäm arean av den del av cylinderytan $x^2+z^2 = 1$ som är innanför cylinderytan $x^2+y^2 = 1$.

26. Bestäm arean av den del av ytan $z = 1-x^2-y^2$ där $z > 0$.

27. Låt R och r vara givna konstanter sådana att $R > r > 0$. Bestäm arean av den torus (bilring) som på parameterform fås genom sambanden $x = (R + r\cos v)\cos u$, $y = (R + r\cos v)\sin u$, $z = r\sin v$ då $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$.

28. Bestäm arean av den del av planet $z = 1 + x + 2y$ som ligger innanför konytan $z = \sqrt{2x^2+10y^2}$.

L 29. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är klotytan $x^2+y^2+z^2 = 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y och $\mathbf{F} = (xz^2, x^2, x^2y^8)$.

30. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är begränsningsytan till kuben $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y och $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$. Beräkna ytintegralen dels direkt och dels med hjälp av Gauss sats.

L 31. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $x^2+y^2+z^4 = 2$ där $z \ge 0$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y och $\mathbf{F} = (yz, -x^2y, x^2+x^2z+z)$.

L 32. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av klotytan $x^2+y^2+z^2 = 4$ där $z \le 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y och $\mathbf{F} = (x^3 + ze^{y^2}, y^3 + \sqrt{1+z^2}, x^2)$.

33. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $z^2 = (x^2+2y^2)^2 - 1$ där $-1 \le z \le 2$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y och $\mathbf{F} = (x^3, y^3, x^2 z)$.

34. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $(x^2+y^2)^2 + z^4 = 1$ där $z \ge 0$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y och $\mathbf{F} = (x^3, y^3, 1)$.

35. a) Visa att $(\operatorname{grad} u) \times (\operatorname{grad} v) = \operatorname{rot}(u \operatorname{grad} v)$ för alla $u, v \in C^2$.

b) Beräkna ytintegralen $\iint_Y ((\operatorname{grad} u) \times (\operatorname{grad} v)) \cdot \mathbf{N}\,dS$ där Y är den del ytan $(x^2+2y^2)^2 + z^4 = 1$ där $z \ge 0$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y, $u = x + y^2 + z^3$ och $v = x + y + z$.

L 36. Sätt $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ och betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$$

definierat då $(x,y,z) \ne (0,0,0)$. Visa att $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 0$ för alla $(x,y,z) \ne (0,0,0)$. Beräkna också ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $x^2+y^2+z^4 = 1$ där $z \ge 0$ och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y.

37. I denna uppgift införs ett vanligt alternativt skrivsätt för ytintegraler.

a) Låt Y vara en orienterbar C^1-yta i $\mathbf{R}^3$, låt vektorerna $\mathbf{N}(x,y,z)$, $(x,y,z) \in Y$, vara enhetsnormalvektorerna till ena sidan av Y, samt låt $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ vara ett vektorfält som är kontinuerligt på Y. Visa att om $(x,y,z) = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ är en parameterframställning av Y så gäller för ytintegralen $\iint_Y (P,Q,R)\cdot\mathbf{N}\,dS$ att

$$\iint_Y (P,Q,R)\cdot\mathbf{N}\,dS = \pm \iint_D \left(P(\mathbf{r}(u,v))\frac{d(y,z)}{d(u,v)} + Q(\mathbf{r}(u,v))\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + R(\mathbf{r}(u,v))\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right) du\,dv,$$

där plustecknet gäller om enhetsnormalvektorerna $\mathbf{N}(\mathbf{r}(u,v))$, $(u,v) \in D$ har samma riktning som normalvektorerna $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$, $(u,v) \in D$, och minustecknet gäller om de är motsatt riktade. På grund av utseendet av högerledet i likheten ovan så används även skrivsättet

$$\iint_Y P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy$$

för ytintegralen $\iint_Y (P,Q,R)\cdot\mathbf{N}\,dS$.

b) Beräkna ytintegralen $\iint_Y (x+y)\,dy\,dz + (y+z)\,dz\,dx + (z-x)\,dx\,dy$ där Y är plana ytan $x+y+z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ med uppåtriktad normalriktnig.

c) Beräkna ytintegralen $\iint_Y (x+y+z)\,dx\,dy$ där Y är ytan $z = x^2+y^2$, $z \le 1$ med utåtriktad normalriktning.

L 38. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma 2y\,dx - z\,dy + x^3\,dz$ där γ är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2 = 1$ och planet $x + 2y + z = 1$ och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning.

39. Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$ där γ är skärningskurvan mellan ytorna $z = xy$ och $x^2+y^2 = 1$ och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. Beräkna kurvintegralen dels direkt från definitionen genom att införa en lämplig parametrisering av γ samt dels med hjälp av Stokes sats.

L 40. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma yz\,dx + (xz + x^3)\,dy + xy\,dz$ där γ är skärningskurvan mellan halvklotytan $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ och cylinderytan $3x^2+2y^2 = 1$ och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning.

L 41. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (x^2 + z^3)\,dx + (xy^2 + 2yz)\,dy + (3xz^2 + y^2)\,dz$ där γ är skärningskurvan mellan ytan $z = (500 - (x+1)^4 - (y+2)^4)^{1/2}$ och cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ samt γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning.

L 42. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma x^2 z\,dx - y^2 z\,dy + z^3\,dz$ där γ är skärningskurvan mellan planet $z = 1+x+y$ och ytan $z = \sqrt{2x^2 + 4y^2}$ och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning.

L 43. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (-y^3 + z^2)\,dx + (x^3y^3 + x^2 + 3z^2)\,dy + (10z^4 + 2xz + 6yz)\,dz$ där γ är den del av skärningskurvan mellan funktionsytan $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ och cylinderytan $3x^2 + 4y^2 = 4$ som ligger i området $x \geq 0$ och γ:s riktning är sådan att y växer då (x, y, z) genomlöper γ i dess riktning.

L 44. Bestäm en potentialfunktion till vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \Big(e^x \ln z + y^3, 3xy^2 + z, \frac{e^x}{z} + y\Big)$$

i området $z > 0$, eller visa att en sådan potentialfunktion inte finns. Beräkna också kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}$ är givna vektorfältet och γ är kurvan $x = t^3$, $y = t^2$, $z = e^{t^2}$, $0 \leq t \leq 1$.

45. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2z^3 + 2xy, 2xyz^3 + x^2 + z^2, 3xy^2z^2 + 2yz + 3z^2 + x)$, $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ på $\mathbf{R}^3$, eller visa att en sådan potentialfunktion inte finns. Beräkna också kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ är kurvan

$$x = \frac{2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2}{1+t^4}, \quad z = \frac{2}{(1+t^2)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

L 46. Bestäm supremumvärdet av de värden som kurvintegralen $\int_\gamma (6xy^2 + z^3)\,dx + (11z - 12xy^2)\,dy - 6x^2y\,dz$ kan anta om γ är en enkel sluten kurva på planet $x + y + z = 1$ och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning.

47. Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma 2y^5\,dx + 2x^5\,dy + 5xyz\,dz$ för kurvor γ. Visa att kurvintegralen inte är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$. Visa att kurvintegralen dock är oberoende av vägen för kurvor γ på paraboloiden $z = x^2 + y^2$ förslagsvis genom att visa att kurvintegralen är 0 för varje enkel sluten kurva γ på paraboloiden. Bestäm också kurvintegralens värde då γ är en kurva på paraboloiden $z = x^2 + y^2$ från punkten $(-1, 0, 1)$ på paraboloiden till punkten $(1, 1, 2)$ på paraboloiden.

L 48. Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma (-4x^2y + xyz + z^2 + y)\,dx + (4xy^2 - x^2z - x + z)\,dy + 2xz\,dz$ för kurvor γ. Visa att kurvintegralen inte är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$. Visa att kurvintegralen dock är oberoende av vägen för kurvor γ på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ förslagsvis genom att visa att kurvintegralen är 0 för varje enkel sluten kurva γ på cylinderytan. För en godtycklig punkt (a, b, c) på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ beräkna också kurvintegralens värde uttryckt i a, b och c då γ är en kurva på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1, 0, 0)$ på cylinderytan till punkten (a, b, c) på cylinderytan.

49. I denna uppgift visas att divergenssatsen och Stokes sats båda är generaliseringar av Greens formel.

a) Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen begränsad mängd sådan att dess randkurva $\Gamma \in C^1$. Låt vidare Γ ha riktning så att området D hela tiden ligger till vänster då Γ genomlöps i sin riktning. Visa att om $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ är en parametrisering av Γ med angiven riktning så är $(\psi'(u), -\varphi'(u))$ för varje parametervärde u en vektor som är vinkelrät mot Γ och riktad ut från D.

b) Låt D och Γ vara som i a) och låt $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ vara funktioner som är C^1 på $D \cup \Gamma$. Låt $V \subset \mathbf{R}^3$ vara mängden $(x,y) \in D$, $0 < z < 1$ (dvs V är en rät cylinder med bottenyta D och höjd 1), och sätt $\mathbf{F}(x,y,z) = (Q(x,y), -P(x,y), 0)$ då $(x,y) \in D \cup \Gamma$, $z \in \mathbf{R}$. Visa att om divergenssatsen tillämpas på vektorfältet $\mathbf{F}$ och området V så fås att

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy,$$

vilket är Greens formel i planet. Divergenssatsen är alltså en generalisering av Greens formel i planet.

c) Låt D och Γ vara som i a) samt låt $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ vara som i b). Låt $Y \subset \mathbf{R}^3$ vara ytan $(x,y) \in D$, $z = 0$, och sätt $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$ då $(x,y) \in D \cup \Gamma$, $z \in \mathbf{R}$. Visa att om Stokes sats tillämpas på vektorfältet $\mathbf{F}$ och ytan Y så fås att

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy,$$

vilket igen är Greens formel i planet. Även Stokes sats är alltså en generalisering av Greens formel i planet.

50. Låt $\mathbf{F}$ vara ett givet C^2-vektorfält i $\mathbf{R}^3$. Visa att $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \triangle\mathbf{F}$. (Operatorn $\triangle$ är Laplacianen, dvs $\triangle = \nabla\cdot\nabla$.)

51. Låt $K \subset \mathbf{R}^3$ vara en begränsad öppen mängd och låt $\mathbf{n}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till ∂K (begränsningsytan till K). Visa under tillräckliga regularitetsantaganden att

$$\iint_{\partial K} (f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}})\,dS = \iiint_K (f \triangle g - g \triangle f)\,dx\,dy\,dz.$$

(Här betecknar $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}}$ riktningsderivatan av funktionen φ i riktningen $\boldsymbol{n}$. Beteckningen är vanlig i fysikaliska tillämpningar.)

L 52. Låt $K \subset \mathbf{R}^3$ vara en begränsad öppen enkelt sammanhängande mängd med C^1-rand Y och låt $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ vara vektorfält som är C^1 i K och kontinuerliga på $K \cup Y$. Antag att $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ och att $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{G}$ i K samt att $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}$ på Y där $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y. Visa att $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ i hela $K \cup Y$.

Svar till övningarna

1. Största värdet $= 2e^{-1/2}$, minsta värde saknas.

2. $]0, 6e^{-29/36}]$.

3. Största värdet $= 8e^{-2}$, minsta värdet $= 0$.

4. Största värde saknas, minsta värdet $= -4$.

5. Största värde saknas, minsta värdet $= -7$.

6. Största värde saknas, minsta värdet $= -4e^{-2}$.

7. Största värdet $= 2$, minsta värdet $= 3^{1/3}$.

8. Största värdet $= 2$, minsta värdet $= 0$.

9. Största värdet $= \frac{1}{2}5^{1/2}$.

10. Största värde saknas, minsta värdet $= \frac{10^{1/3}}{5}$.

11. Största värdet $= 5e^{-3/4}$, minsta värdet $= -\frac{5}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$.

12. a) Största och minsta värde saknas, b) Största värdet $= 3$, minsta värdet $= 2$.

13. Största värde saknas, minsta värdet $= 4$.

14. $e - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

15. $\frac{6}{5}$.

16. $2 + \frac{\pi}{2}$.

17. $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

18. Potential $\varphi(x, y) = x^5y^{11} + xy^2 + x^2 + y^3$, 4.

19. Potential $\varphi(x, y) = x^3y^2 + y^4 + x^2$, 12.

20. $-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

21. $-\frac{5\pi}{4}$.

22. a) $\frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$, antas. b) $\sqrt{2}\pi$, antas ej. c) $\frac{2}{3}$, antas.

23. $R(u, v) = P(f(u, v), g(u, v))f_1'(u, v) + Q(f(u, v), g(u, v))g_1'(u, v)$,
    $S(u, v) = P(f(u, v), g(u, v))f_2'(u, v) + Q(f(u, v), g(u, v))g_2'(u, v)$.

24. π.

25. 8.

26. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

27. $4\pi^2 Rr$.

28. $10\sqrt{3}\pi$.

29. $\frac{4\pi}{15}$.

30. 3.

31. $\frac{8\pi}{5}\sqrt[4]{2}+\pi$.

32. $\frac{873\pi}{20}$.

33. $\frac{21\sqrt{2}\pi}{8}$.

34. $\frac{11\pi}{5}$.

35. b) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

36. 2π.

37. b) $\frac{2}{3}$, c) $-\frac{\pi}{2}$.

38. $-\frac{5\pi}{2}$.

39. $-\pi$.

40. $\frac{\sqrt{6}\pi}{24}$.

41. $\frac{\pi}{4}$.

42. $-14\sqrt{2}\pi$.

43. $\frac{56}{9}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}$.

44. Potential $\varphi(x,y,z)=e^x\ln z+xy^3+yz$, $2e+1$.

45. Ej potential (men nästan), $-\frac{533}{6}$.

46. $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$.

47. $\frac{22}{3}$.

48. $-a^3b+ab^3+ac^2$.

Lösningar till de med L markerade övningarna

1. Vi har att

$$0 < f(x,y) = (1+x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2} =$$

$$\text{(polära koordinater } x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$$

$$= (1+r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta)e^{-r^2} \le (1+3r^2)e^{-r^2} \quad \text{för alla } (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

och att

$$(1+3r^2)e^{-r^2} \to 0 \quad \text{då } r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty,$$

vilket visar att f har ett största värde på $\mathbf{R}^2$ men att f saknar minsta värde på $\mathbf{R}^2$. Eftersom $\mathbf{R}^2$ saknar rand så antar f sitt största värde på $\mathbf{R}^2$ i en stationär punkt. Derivering ger att

$$f_1'(x,y) = -2x(x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2}, \quad f_2'(x,y) = 2y(1-x^2-2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

Dvs $f_1'(x,y) = f_2'(x,y) = 0 \iff$

$$x(x^2+2y^2) = 0, \quad y(1-x^2-2y^2) = 0.$$

Första ekvationen ger $x = 0$ eller $x^2+2y^2 = 0$. Första alternativet $x = 0$ insatt i den andra ekvationen ger $y(1-2y^2) = 0$, som har lösningarna $y = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Andra alternativet $x^2+2y^2 = 0$ ger $x = y = 0$, vilket också uppfyller den andra ekvationen. De stationära punkterna till f är alltså $(0,0)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Vi har att $f(0,0) = 1$ och $f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2e^{-1/2}$. Eftersom $2e^{-1/2} = 2/\sqrt{e} > 2/\sqrt{3} > 1$ så följer att f:s största värde på $\mathbf{R}^2$ är $2e^{-1/2}$ och att största värdet antas i punkterna $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Låt D beteckna mängden $x \ge 0$, $0 \le y \le 1$. För alla $(x,y) \in D$ gäller att $0 < f(x,y) = (1+6x+2y)e^{-x-y^2} \le (3+6x)e^{-x}$, och $(3+6x)e^{-x} \to 0$ då $x \to \infty$. Det följer att f har ett största men inget minsta värde på D och vidare följer om M betecknar f:s största värde på D att f på D antar värdena i intervallet]0,M]. Det återstår att bestämma M.

Stationära punkter i det inre av D.

$f_1'(x,y) = (6-(1+6x+2y))e^{-x-y^2}$, $f_2'(x,y) = (2-2y(1+6x+2y))e^{-x-y^2}$.
$f_1' = f_2' = 0$ ger $(x,y) = (7/9, 1/6)$ som ligger i det inre av D. $f(7/9,1/6) = 6e^{-29/36}$.

f:s betende på randen av D.

(a) Randkurvan $x \ge 0$, $y = 0$.

$a(x) = f(x,0) = (1+6x)e^{-x}$ studeras då $x \ge 0$. $a'(x) = (5-6x))e^{-x}$.

$$\begin{array}{cccccc} x & 0 & & 5/6 & & \infty \\ a'(x) & & + & 0 & - & \\ a(x) & & \nearrow & 6e^{-5/6} & \searrow & \end{array}.$$

(b) Randkurvan $x \ge 0$, $y = 1$.

$b(x) = f(x,1) = 3e^{-1}(1+2x)e^{-x}$ studeras då $x \ge 0$. $b'(x) = 3e^{-1}(1-2x))e^{-x}$.

$$\begin{array}{cccccc} x & 0 & & 1/2 & & \infty \\ b'(x) & & + & 0 & - & \\ b(x) & & \nearrow & 6e^{-3/2} & \searrow & \end{array}.$$

(c) Randkurvan $x = 0$, $0 \le y \le 1$.

$c(y) = f(0, y) = (1 + 2y)e^{-y^2}$ studeras då $0 \le y \le 1$. $c'(y) = 2(1 - y - 2y^2)e^{-y^2}$.

$$\begin{array}{cccccc} y & 0 & & 1/2 & & 1 \\ c'(y) & & + & 0 & - & \\ c(y) & & \nearrow & 2e^{-1/4} & \searrow & \end{array} .$$

Det följer att $M = \max\left(6e^{-29/36}, 6e^{-5/6}, 6e^{-3/2}, 2e^{-1/4}\right) = 6e^{-29/36}$.

4. *Stationära punkter.*

$f_1'(x, y) = 2xy + 2y^2 - 6y = 2y(x + y - 3)$, $f_2'(x, y) = x^2 + 4xy - 6x = x(x + 4y - 6)$.
$f_1'(x, y) = f_2'(x, y) = 0$ ger fyra möjliga fall: fallet $y = 0$, $x = 0$ ger punkten $(x, y) = (0, 0)$; fallet $y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$ ger punkten $(x, y) = (6, 0)$; fallet $x + y - 3 = 0$, $x = 0$ ger punkten $(x, y) = (0, 3)$; fallet $x + y - 3 = 0$, $x + 4y - 6 = 0$ ger punkten $(x, y) = (2, 1)$. De stationära punkterna är alltså $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 3)$ och $(2, 1)$. Motsvarande funktionsvärden är $f(0, 0) = 0$, $f(6, 0) = 0$, $f(0, 3) = 0$ och $f(2, 1) = -4$.

Största/minsta värde på $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Låt D vara mängden $x \ge 0$, $y \ge 0$. När det gäller ett eventuellt största värde på D, notera t.ex att $(t, t) \in D$ för alla $t \ge 0$ och att $f(t, t) = 3t^3 - 6t^2 \to \infty$ då $t \to \infty$. Funktionen f saknar alltså största värde på D. När det gäller ett eventuellt minsta värdet på D, notera att $f(x, y)$ kan skrivas $f(x, y) = xy(x + 2y - 6)$, och låt D_1 vara den del av D där $x + 2y \le 6$ samt låt D_2 vara den del av D där $x + 2y > 6$ På mängden D_1 som är kompakt har f som är kontinuerlig ett minsta värde, och detta minsta värde är negativt eftersom t.ex $(1, 1) \in D_1$ och $f(1, 1) = -3 < 0$. På mängden D_2 gäller $f \ge 0$. Minsta värdet av f på mängden D_1 är alltså även minsta värde till f på hela mängden D. Funktionen f har alltså ett minsta värde på D. På hela randen till området D är f noll. Funktionen f:s minsta värde på D, som vi vet är negativt, kan alltså inte antas på randen till D, utan kan enbart antas någonstans i det inre av D, och alltså är f stationär där minsta värdet i D antas. Den enda inre punkt i D där funktionen f är stationär är enligt ovan punkten $(2, 1)$. Funktionen f:s minsta värde på D är alltså $f(2, 1) = -4$ (och minsta värdet i D antas i punkten $(2, 1)$ enbart).

5. *Stationära punkter*

$f_1'(x, y) = 12x^3 - 12y$, $f_2'(x, y) = -12x + 12y^5$.
$f_1'(x, y) = 0$ ger $y = x^3$ som insatt i $f_2'(x, y) = 0$ ger $x = x^{15}$ som har lösningarna $x = 0$, $x = -1$ och $x = 1$. De stationära punkterna är alltså $(0, 0)$, $(-1, -1)$ och $(1, 1)$. Motsvarande funktionsvärden är $f(0, 0) = 0$, $f(-1, -1) = -7$ och $f(1, 1) = -7$.

Största/minsta värde

$f(x, 0) = 3x^4 \to \infty$ då $x \to \infty$ visar att f saknar största värde på $\mathbf{R}^2$.

Vi visar nu att f har ett minsta värde på $\mathbf{R}^2$ genom att med polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ visa att $f(x, y) \to \infty$ då $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$. Vi har att

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^4\cos^4\theta - 12r^2\cos\theta\sin\theta + 2r^6\sin^6\theta \ge 3r^4\cos^4\theta - 12r^2 + 2r^6\sin^6\theta \ge$$

$$(\text{om } r \ge 1)$$

$$\ge 3r^4\cos^4\theta - 12r^2 + 2r^4\sin^6\theta \ge$$

$$(\text{ty } \cos^4\theta \ge \cos^6\theta \text{ för varje } \theta \in \mathbf{R})$$

$$\ge 3r^4\cos^6\theta - 12r^2 + 2r^4\sin^6\theta =$$

$$= r^4(3\cos^6\theta + 2\sin^6\theta) - 12r^2 > r^4(\cos^6\theta + \sin^6\theta) - 12r^2 \ge$$

$$(\text{ty } |\cos\theta| \geq \tfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ eller } |\sin\theta| \geq \tfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ för varje } \theta \in \mathbf{R})$$

$$\geq r^4\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 - 12r^2 = \tfrac{1}{8}r^4 - 12r^2.$$

Dvs vi har att $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq \frac{1}{8}r^4 - 12r^2$ för alla $r \geq 1$. Eftersom $\frac{1}{8}r^4 - 12r^2 \to \infty$ då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ har vi visat att $f(x,y) \to \infty$ då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$. Funktionen f har alltså ett minsta värde på $\mathbf{R}^2$. Alla punkter i $\mathbf{R}^2$ är inre punkter. Varje punkt där minsta värdet antas är därför en punkt där f är stationär. Tillsammans med beräkningen ovan av de stationära punkterna till f och motsvarande funktionsvärden visar det att minsta värdet av f $\mathbf{R}^2$ är -7 (och att minsta värdet antas i punkterna $(-1,-1)$ och $(1,1)$).

7. Sätt $g(x,y) = x^3 + 3x^2y + 2y^3 - 6$ och låt D vara mängden $g(x,y) = 0$, $x \geq 0$, $2y \geq x$.

Vi börjar med att motivera att f har ett största och ett minsta värde i D. Mängden D är kompakt, se nedan. Funktionen $f(x,y) = x + y$ är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^2$ och således speciellt kontinuerlig i D. Det följer därför av sats om kontinuerliga funktioner att f har ett största och ett minsta värde i D. Att D verkligen är kompakt kan fås såhär. Funktionen $g(x,y)$ är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^2$, och alltså är mängden $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, g(x,y) = 0\}$ sluten. Mängden $F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ 2y \geq x\}$ är också sluten, och eftersom $D = E \cap F$ och snitt av slutna mängder alltid är en sluten mängd är mängden D sluten. Vidare har vi att

$$(x,y) \in D \iff x^3 + 3x^2y + 2y^3 = 6,\ x \geq 0,\ 2y \geq x \implies$$

$$x^3 \leq 6,\ 2y^3 \leq 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 6^{1/3},\ 0 \leq y \leq 3^{1/3},$$

och alltså är D även begränsad. Mängden D är således både sluten och begränsad och alltså kompakt.

Vi bestämmer nu största och minsta värdet av f i D. Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller att varje punkt där största eller minsta värdet antas finns med bland punkterna i 1), 2) och 3) nedan.

1) Punkter $(x,y) \in D$ sådana att $\nabla f(x,y)$ och $\nabla g(x,y)$ är linjärt beroende.

Derivering ger

$$\nabla f(x,y) = (1,1) \text{ och } \nabla g(x,y) = 3(x^2 + 2xy, x^2 + 2y^2).$$

Enligt teorin för determinanter är två vektorer i $\mathbf{R}^2$ linjärt beroende om och endast om deras determinant är 0. Det följer att $\nabla f(x,y)$ och $\nabla g(x,y)$ är linjärt beroende $\iff$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x^2 + 2xy & x^2 + 2y^2 \end{vmatrix} = 0 \iff 1 \cdot (x^2 + 2y^2) - 1 \cdot (x^2 + 2xy) = 0 \iff$$

$$y(y - x) = 0 \iff y = 0 \text{ eller } y = x.$$

Av $y = 0$ och $g(x,y) = 0$ fås $x^3 = 6$, dvs $x = 6^{1/3}$. Punkten $\left(6^{1/3}, 0\right)$ ligger inte i D. Av $y = x$ och $g(x,y) = 0$ fås $x^3 + 3x^3 + 2x^3 = 6$, dvs $x = 1$, vilket med $y = x$ ger $y = 1$. Punkten $(1,1)$ ligger i D. Det finns således exakt en punkt i D där $\nabla f(x,y)$ och $\nabla g(x,y)$ är linjärt beroende och det är punkten $(1,1)$. Motsvarande funktionsvärde är $f(1,1) = 2$.

2) Ändpunkter (relativa randpunkter) till kurvan D.

I ändpunkter till D gäller $x = 0$ eller $2y = x$. Insättning av $x = 0$ i $g(x,y) = 0$ ger $2y^3 = 6$, dvs $y = 3^{1/3}$. Punkten $\left(0, 3^{1/3}\right)$ är alltså en ändpunkt till kurvan D. Funktionsvärdet där är $f\left(0, 3^{1/3}\right) = 3^{1/3}$. Insättning av $x = 2y$ i $g(x,y) = 0$ ger $8y^3 + 12y^3 + 2y^3 = 6$, dvs $y = \left(\frac{3}{11}\right)^{1/3}$. Punkten $\left(2\left(\frac{3}{11}\right)^{1/3}, \left(\frac{3}{11}\right)^{1/3}\right)$ är alltså en också en ändpunkt till kurvan D. Funktionsvärde där är $f\left(2\left(\frac{3}{11}\right)^{1/3}, \left(\frac{3}{11}\right)^{1/3}\right) = \left(\frac{81}{11}\right)^{1/3}$.

3) Punkter $(x, y) \in D$ sådana att någon av $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ ej existerar.

Sådana punkter finns ej.

Av 1), 2) och 3) framgår att största värdet av f i D är max $\left(2, 3^{1/3}, \left(\frac{81}{11}\right)^{1/3}\right)$ och att minsta värdet av f i D är min $\left(2, 3^{1/3}, \left(\frac{81}{11}\right)^{1/3}\right)$. Vi har att

$$2^3 = 8 = \tfrac{88}{11}, \quad \left(3^{1/3}\right)^3 = 3 = \tfrac{33}{11}, \quad \left(\left(\tfrac{81}{11}\right)^{1/3}\right)^3 = \tfrac{81}{11}.$$

Således har f största värde 2 och minsta värde $3^{1/3}$ i D. Största värdet antas i punkten $(1, 1)$ och minsta värdet antas i punkten $\left(0, 3^{1/3}\right)$.

8. Sätt $g(x, y) = x^3 + 3xy + 8y^3 - 22$ och låt D vara mängden $g(x, y) = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Motivering av att f har ett största och ett minsta värde på D.

Det är klart att $f(x, y) \geq 0$ för alla $(x, y) \in D$, och eftersom $(22^{1/3}, 0) \in D$ och $f(22^{1/3}, 0) = 0$, har f ett minsta värde på D och minsta värdet är 0.

Vi motiverar nu att f också har ett största värde på D. Funktionen g är kontinuerlig på hela $\mathbf{R}^2$ och alltså är mängden $g(x, y) = 0$ sluten. Mängden D är snittet mellan denna mängd och den slutna mängden $x \geq 0$, $y \geq 0$, och alltså är D sluten. Vidare har vi att $(x, y) \in D \Leftrightarrow x^3 + 3xy + 8y^3 = 22$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, varav dels följer att $x^3 \leq 22$, $x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 22^{1/3}$, och dels följer att $8y^3 \leq 22$, $y \geq 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq y \leq \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$. Mängden D är alltså även begränsad. Eftersom D är både sluten och begränsad är D kompakt. Den givna funktionen f är kontinuerlig på hela $\mathbf{R}^2$ och speciellt kontinuerlig på D. Eftersom en funktion som är kontinuerlig på en kompakt mängd alltid har ett största (och ett minsta värde) på mängden, så följer att f har ett största (och ett minsta värde) på D.

Bestämning av största värdet på D.

Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller att varje punkt där största värdet antas finns med bland punkterna i 1), 2) och 3) nedan.

1) Punkter $(x, y) \in D$ sådana att $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende.

Derivering ger

$$\nabla f(x, y) = (y, x) \text{ och } \nabla g(x, y) = 3(x^2 + y, x + 8y^2).$$

Enligt teorin för determinanter är två vektorer i $\mathbf{R}^2$ linjärt beroende om och endast om deras determinant är 0. Det följer att $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende $\iff$

$$\begin{vmatrix} y & x \\ x^2 + y & x + 8y^2 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$xy + 8y^3 - (x^3 + xy) = 0 \iff x^3 = 8y^3 \iff x = 2y.$$

Insättning av $x = 2y$ i $g(x, y) = 0$ ger $8y^3 + 3y^2 = 11$, en ekvation som uppenbarligen löses av $y = 1$. Division av $8y^3 + 3y^2 - 11$ med $y - 1$ ger kvoten $8y^2 + 11y + 11$, ett polynom som saknar reella nollställen. Lösningen $y = 1$ är alltså den enda reella lösnigen till ekvationen $8y^3 + 3y^2 = 11$. Av $y = 1$ fås $x = 2y = 2 \cdot 1 = 2$ Den erhållna punkten $(2, 1)$ ligger i D, och är alltså den enda punkt i D där $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende. Motsvarande funktionsvärde är $f(2, 1) = 2$.

2) Ändpunkter (relativa randpunkter) till kurvan D.

I ändpunkter till kurvan D är $x = 0$ eller $y = 0$. Insättning av $x = 0$ i $g(x, y) = 0$ ger att $8y^3 - 22 = 0$ $\iff y = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$, insättning av $y = 0$ i $g(x, y) = 0$ ger att $x^3 - 22 = 0 \iff x = 22^{1/3}$. Kurvan D har alltså två ändpunkter och det är punkterna $\left(0, \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}\right)$ och $22^{1/3}, 0)$. Funktionsvärdet i båda dessa punkter är 0.

3) Punkter $(x, y) \in D$ sådana att någon av $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ ej existerar.

Sådana punkter finns ej.

Av 1), 2) och 3) framgår att största värdet av f på D är 2.

9. Sätt $g(x, y) = x^3y + 4xy^3 - 5$ och låt D vara mängden $g(x, y) = 0$, $x \geq 1$.

Varje tredjegradsekvation har minst en reell rot. För varje $x \geq 1$ finns det således minst ett reellt tal y sådant att $x^3y + 4xy^3 = 5$. Låt y_x vara ett sådant tal. Då gäller att $(x, y_x) \in D$ för varje $x \geq 1$, och alltså är D obegränsad.

Notera att $x^3y + 4xy^3 = 5 \iff xy = \frac{5}{x^2+4y^2}$, och eftersom $f(x, y) = xy$ har vi att

$$f(x, y) = \frac{5}{x^2 + 4y^2} \quad \text{för alla} \quad (x, y) \in D. \tag{1}$$

Av (1) följer dels att $f(x, y) > 0$ för alla $(x, y) \in D$, och dels att $f(x, y) \to 0$ då $(x, y) \to \infty$ i D. (Obs att $(x, y) \to \infty$ i D är möjligt eftersom D är obegränsad.) Funktionen f saknar således minsta värde i mängden D.

Notera vidare att $(1, 1) \in D$ och att $f(1, 1) = 1$. Låt E vara den del av D där $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Då är E kompakt (visas nedan), och eftersom f är kontinuerlig i E (f är kontinuerlig överallt) har f ett största värde i E, enligt sats om kontinuerliga funktioner. Eftersom $(1, 1) \in E$ är största värdet av f i E större eller lika med $f(1, 1) = 1$. Av (1) följer att $f(x, y) < 1$ för alla $(x, y) \in D \setminus E$. Största värdet av f i E är alltså största värde till f i hela D. Funktionen f har således ett största värde i mängden D.

Det återstår dock att visa att E är kompakt. Låt M_1 vara mängden $g(x, y) = 0$, låt M_2 vara mängden $x \geq 1$ och låt M_3 vara mängden $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Då är $E = M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Mängden M_1 är sluten eftersom g är kontinuerlig. Mängderna M_2 och M_3 är uppenbarligen också slutna. Följaktligen är E sluten eftersom snitt av slutna mängder alltid är en sluten mängd. Mängden E är också begränsad eftersom $D \subset M_3$ och M_3 är begränsad. Mängden E är således både sluten och begränsad och därmed kompakt.

Vi bestämmer nu största värdet av f i D. Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller att varje punkt där största värdet antas finns med bland punkterna i 1), 2) och 3) nedan.

1) Punkter $(x, y) \in D$ sådana att $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende.

Derivering ger

$$\nabla f(x, y) = (y, x) \text{ och } \nabla g(x, y) = (3x^2 + 4y^3, x^3 + 12xy^2).$$

Enligt teorin för determinanter är två vektorer i $\mathbf{R}^2$ linjärt beroende om och endast om deras determinant är 0. Det följer att $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende $\iff$

$$\begin{vmatrix} y & x \\ 3x^2 + 4y^3 & x^3 + 12xy^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \iff$$

$$y(x^3 + 12xy^2) - x(3x^2 + 4y^3) = 0 \iff xy(4y^2 - x^2) = 0.$$

För alla $(x, y) \in D$ har vi att $x \geq 1$, och eftersom $x \geq 1$ och $x^3y + 4xy^3 = 5$ medför att $y > 0$ har vi också att $y > 0$ för alla $(x, y) \in D$. Sambandet $xy(4y^2 - x^2) = 0$ tillsammans med $(x, y) \in D$ ger alltså $x = 2y$ som enda möjlighet. Insättning av $x = 2y$ i $g(x, y) = 0$ ger $16y^4 = 5$, vilket med $y > 0$

ger $y = \frac{1}{2}5^{1/4}$. Av $y = \frac{1}{2}5^{1/4}$ fås $x = 2y = 5^{1/4}$. Den erhållna punkten $\left(5^{1/4}, \frac{1}{2}5^{1/4}\right)$ ligger i D, och är alltså den enda punkt i D där $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende. Motsvarande funktionsvärde är $f\left(5^{1/4}, \frac{1}{2}5^{1/4}\right) = \frac{1}{2}5^{1/2}$.

2) Ändpunkter (relativa randpunkter) till kurvan D.

I ändpunkter till kurvan D är $x = 1$. Insättning av $x = 1$ i $g(x, y) = 0$ ger att $y + 4y^3 = 5$ som har en lösning $y = 1$, och eftersom $y + 4y^3$ är en strängt växande funktion av y då $y \in \mathbf{R}$ är det också den enda reella lösningen. Kurvan D har alltså en ändpunkt och det är punkten $(1, 1)$. Motsvarande funktionsvärde är $f(1, 1) = 1$.

3) Punkter $(x, y) \in D$ sådana att någon av $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ ej existerar.

Sådana punkter finns ej.

Av 1), 2) och 3) framgår att största värdet av f i D är $\max(\frac{1}{2}5^{1/2}, 1) = \frac{1}{2}5^{1/2}$ och att största värdet antas i punkten $\left(5^{1/4}, \frac{1}{2}5^{1/4}\right)$.

14. Sätt

$$P(x, y) = -\frac{2xe^y}{(1 + x^2)^2} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = x + \frac{e^y}{1 + x^2}.$$

Låt γ_1 vara y-axeln från punkten $(0, 0)$ till punkten $(0, 1)$, låt γ_2 vara x-axeln från punkten $(0, 0)$ till punkten $(1, 0)$ och låt D vara området $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Greens formel ger att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + \int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_1' - P_2')\,dxdy.$$

Men

$$\int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy \quad \text{och} \quad Q_1' - P_2' = 1.$$

Vi får att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + \iint_D dxdy. \tag{1}$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 0$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$, och den ger att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - 1. \tag{2}$$

En parametrisering av γ_2 är $x = t$, $y = 0$, $0 \leq t \leq 1$, och den ger att

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 -\frac{2t}{(1 + t^2)^2}\,dt = \left[\frac{1}{1 + t^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Vidare har vi att

$$\iint_D dxdy = \text{area}(D) = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

(2), (3) och (4) insatt i (1) ger att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = e - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

15. Sätt

$$P(x, y) = y^4 - x^3y + 1 \quad \text{och} \quad Q(x, y) = 4xy^3 + 2.$$

Låt γ_1 vara y-axeln från punkten $(0,0)$ till punkten $(0,1)$, låt γ_2 vara x-axeln från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,0)$, och låt D vara området $0 \le y \le \left(1-x^4\right)^{1/4}$, $0 \le x \le 1$. Greens formel ger att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + \int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_1' - P_2')\,dxdy.$$

Men $\int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$ och $Q_1' - P_2' = x^3$. Vi får att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + \iint_D x^3\,dxdy. \tag{1}$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 0$, $y = t$, $0 \le t \le 1$, och den ger att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 2\,dt = 2. \tag{2}$$

En parametrisering av γ_2 är $x = t$, $y = 0$, $0 \le t \le 1$, och den ger att

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 dt = 1. \tag{3}$$

Vidare har vi att

$$\iint_D x^3\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\left(1-x^4\right)^{1/4}} x^3\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x^3 y\right]_{y=0}^{y=\left(1-x^4\right)^{1/4}} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x^3\left(1-x^4\right)^{1/4}\,dx = \left[-\frac{1}{5}\left(1-x^4\right)^{5/4} \right]_0^1 = \frac{1}{5} \tag{4}$$

(2), (3) och (4) insatt i (1) ger att $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \frac{6}{5}$

16. Sätt

$$P(x,y) = y + \sqrt{1+y^2} \text{ och } Q(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Låt Γ vara x-axeln från punkten $(-1,0)$ till punkten $(1,0)$, och låt D vara området $x^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$. Greens formel ger att

$$\int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy + \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_1' - P_2')\,dxdy.$$

Men $\int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy = -\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ och $Q_1' - P_2' = -1$. Vi får att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + \iint_D dxdy. \tag{1}$$

En parametrisering av Γ är $x = t$, $y = 0$, $-1 \le t \le 1$, och den ger att

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^1 dt = 2, \tag{2}$$

och

$$\iint_D dxdy = \text{area}(D) = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

(2) och (3) insatt i (1) ger att $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 2 + \frac{\pi}{2}$.

17. Sätt
$$P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+y^2 \quad \text{och} \quad Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$
Låt Γ vara x-axeln från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,0)$, och låt D vara området $0\le y\le \sin\pi x$, $0\le x\le 1$. Greens formel ger att
$$\int_{-\gamma} P\,dx+Q\,dy+\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=\iint_D (Q_1'-P_2')\,dxdy.$$
Men $\int_{-\gamma} P\,dx+Q\,dy=-\int_{\gamma} P\,dx+Q\,dy$ och $Q_1'-P_2'=-2y$. Vi får att
$$\int_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+\iint_D 2y\,dxdy. \tag{1}$$
En parametrisering av Γ är $x=t$, $y=0$, $0\le t\le 1$, och den ger att
$$\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=\int_0^1 t(1+t^2)^{-1/2}\,dt=\left[(1+t^2)^{1/2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1 \tag{2}$$
Vidare har vi att
$$\iint_D 2y\,dxdy=\int_0^1\Big(\int_0^{\sin\pi x} 2y\,dy\Big)\,dx=\int_0^1\Big(\left[y^2\right]_{y=0}^{y=\sin\pi x}\Big)\,dx=$$
$$=\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\cos 2\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\Big]_0^1=\frac{1}{2} \tag{3}$$
(2) och (3) insatt i (1) ger att $\int_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

18. En eventuell potentialfunktion φ till $\mathbf{F}$ på $\mathbf{R}^2$ är en funktion φ på $\mathbf{R}^2$ sådan att $\mathbf{F}(x,y)=\nabla\varphi(x,y)$ för alla $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, dvs sådan att
$$\varphi_x'(x,y)=5x^4y^{11}+y^2+2x \tag{1}$$
$$\varphi_y'(x,y)=11x^5y^{10}+y^2+2xy+3y^2 \tag{2}$$
för alla $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. Vi undersöker nu om det finns en funktion φ som upppfyller både (1) och (2). Integration av ekvation (1) med avseende på x ger att
$$\varphi(x,y)=x^5y^{11}+xy^2+x^2+\psi(y) \tag{3}$$
för någon funktion $\psi(y)$, och (3) insatt i (2) ger att
$$11x^5y^{10}+2xy+\psi'(y)=11x^5y^{10}+y^2+2xy+3y^2,$$
vilket är uppfyllt om $\psi(y)=y^3$ (+konstant). Både (1) och (2) är alltså uppfyllda om
$$\varphi(x,y)=x^5y^{11}+xy^2+x^2+y^3, \tag{4}$$
Det finns alltså potentialfunktion till $\mathbf{F}$ på $\mathbf{R}^2$. Funktionen φ i (4) är enligt räkningarna ovan en sådan funktion.

Eftersom det angivna vektorfältet $\mathbf{F}$ har en potentialfunktion φ på $\mathbf{R}^2$ så gäller att
$$\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\varphi(\gamma\text{:s slutpunkt})-\varphi(\gamma\text{:s startpunkt})$$
för varje kurva γ i planet. Den angivna kurvan γ går från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,1)$, och för den kurvan gäller alltså att
$$\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\varphi(1,1)-\varphi(0,0)=4-0=4.$$

20. Sätt
$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+3y^2} \text{ och } Q(x,y) = \frac{x}{x^2+3y^2}.$$
P och Q liksom deras derivator är väldefinierade utanför origo. Derivering ger att $Q_1' = P_2'$. Greens formel kan alltså användas för att byta integrationsväg. Låt γ_1 vara räta linjen från punkten $(-1,-1)$ till punkten $(3,-1)$. Låt vidare γ_a vara den positivt genomlupna ellipsen $x^2+3y^2=a^2$ för något tal $a>0$ så litet att γ_a ligger innanför $\gamma \cup \gamma_1$. Låt slutligen D vara området mellan γ_a och $\gamma \bigcup \gamma_1$. På D som inte innehåller origo kan vi använda Greens formel och få att
$$-\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_a} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_1' - P_2')\,dxdy = 0.$$
Dvs vi har att
$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_a} P\,dx + Q\,dy.$$
Parametriseringen $x=t$, $y=-1$, $-1 \le t \le 3$ av γ_1 ger
$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^{3} \frac{1}{t^2+3}\,dt = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{3} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(\arctan\sqrt{3} - \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})\big) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$
Parametriseringen $x = a\cos t$, $y = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin t$, $0 \le t < 2\pi$ av γ_a ger
$$\int_{\gamma_a} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{\sin t}{a^2}(-a\sin t) + \frac{a\cos t}{a^2}\frac{a}{\sqrt{3}}\cos t\Big)\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} dt = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
Det följer att
$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

21. Sätt
$$P = \frac{y}{x^2+2xy+2y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+2xy+2y^2}.$$
Vi har att
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y^2 - x^2}{(x^2+2xy+y^2)^2}.$$
Detta innebär att vektorfältet har en potential i varje enkelt sammanhängande område som ej omfattar origo. (Origo är vektorfältets enda singulära punkt.) Speciellt är kurvintegralen över varje enkel sluten kurva som ej innesluter origo noll. Låt γ_1 vara vägen genom första, andra och tredje kvadranten längs ellipsen $x^2+2xy+2y^2=1$ från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,-1/\sqrt{2})$, låt γ_2 vara räta linjen från punkten $(0,-1/\sqrt{2})$ till punkten $(0,-2)$, och låt γ_3 vara räta linjen från punkten $(2,0)$ till punkten $(1,0)$. $\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ är en enkel sluten kurva som ej innesluter origo, och alltså gäller enligt ovan att
$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_3} P\,dx + Q\,dy = 0.$$
Vi har att $x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2$ och alltså är $x^2+2xy+2y^2=1$ uppfyllt om $x+y=\cos\theta$, $y=\sin\theta \Leftrightarrow x = \cos\theta - \sin\theta$, $y=\sin\theta$. Vidare har vi att $\cos\theta - \sin\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, $0 \le \theta < 2\pi \Leftrightarrow \theta = 0$, samt att $\cos\theta - \sin\theta = 0$, $\sin\theta = -1/\sqrt{2}$, $0 \le \theta < 2\pi \Leftrightarrow \theta = 5\pi/4$. En parameterframställnig av γ_1 är alltså $x = \cos\theta - \sin\theta$, $y = \sin\theta$, $0 \le \theta \le 5\pi/4$. Vi får att
$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{5\pi/4} \Big(-\frac{\sin\theta}{1}(-\sin\theta - \cos\theta) + \frac{\cos\theta - \sin\theta}{1}\cos\theta)\Big)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{5\pi/4} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \frac{5\pi}{4}.$$

På γ_2 är x =konstant= 0, och alltså är

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_2} -\frac{y}{x^2+2xy+2y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+2xy+2y^2}\,dy = 0.$$

På γ_3 är y =konstant= 0, och alltså är

$$\int_{\gamma_3} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_3} -\frac{y}{x^2+2xy+2y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+2xy+2y^2}\,dy = 0.$$

Vi har alltså att $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = -5\pi/4 - 0 - 0 = -5\pi/4$.

24. Om D betecknar mängden $x^2 + 2y^2 \le 1$ är sökt area =

$$\iint_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy =$$

$$= \iint_D \sqrt{2}\,dxdy = \sqrt{2}\ \text{area}\,(D) = \sqrt{2}\cdot\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \pi.$$

Anmärkning: Ovan har vi använt att en ellipsskiva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \ \text{ där } a, b > 0$$

har area πab, vilket lätt kan visas med dubbelintegration:

$$\text{area}\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\Big) = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} dxdy =$$

(Gör substitutionen $u = \dfrac{x}{a}$, $v = \dfrac{y}{b}$. Substitutionens funktionaldeterminant $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = ab$.)

$$= ab \iint_{u^2+v^2\le 1} dudv = ab\ \text{area}(u^2+v^2\le 1) = \pi ab.$$

25. Ytan $x^2 + y^2 = 1$ är en rät cirkulär cylinderyta (obegränsat lång åt båda hållen) med radien 1 och z-axeln som centrumlinje. Ytan $x^2 + z^2 = 1$ är en rät cirkulär cylinderyta (obegränsat lång åt båda hållen) med radien 1 och y-axeln som centrumlinje. Låt A_1 vara arean av den del av cylinderytan $x^2 + z^2 = 1$ som är innanför cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ och låt A_2 vara arean av den del av ytan $z = \sqrt{1-x^2}$ som är innanför cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$. Eftersom $x^2 + z^2 = 1 \iff z = \pm\sqrt{1-x^2}$ så har vi att $A_1 = 2A_2$. Sambandet $z = \sqrt{1-x^2}$ ger att

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad z'_y = 0 \ \text{ och } \ \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vi får att sökt area

$$A_1 = 2A_2 = 2\iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy = 2\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdy =$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dy\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 2\int_{-1}^{1} 2\,dx = 8.$$

29. Låt V beteckna mängden $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Då är

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \text{ (divergenssatsen) } = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_V z^2\,dxdydz =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz\right)dxdy = \frac{2}{3}\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)^{3/2}\,dxdy =$$

$$= (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta) = \frac{2}{3}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}}(1-r^2)^{3/2} r dr d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_0^1 (1-r^2)^{3/2} r dr = \frac{4\pi}{3}\left[-\frac{1}{5}(1-r^2)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}.$$

Anmärkning: Trippelintegralen ovan kan också beräknas genom att använda sfäriskt polära koordinater.

31. Låt σ vara ytan $x^2+y^2 \le 2$, $z=0$ och låt $\mathbf{n}$ vara den nedåtriktade enhetsnormalen till σ. Låt D vara mängden $x^2+y^2+z^4 \le 2$, $z \ge 0$. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz. \tag{1}$$

En parametrisering av σ är $x=u$, $y=v$, $z=0$, $u^2+v^2 \le 2$. Med $\mathbf{r}=(x,y,z)$ gäller då att $\mathbf{r}=(u,v,0)$, $\mathbf{r}'_1=(1,0,0)$, $\mathbf{r}'_2=(0,1,0)$ och $\mathbf{r}'_1\times\mathbf{r}'_2=(0,0,1)$. Eftersom ytnormalen $\mathbf{r}'_1\times\mathbf{r}'_2$ till σ pekar uppåt i den införda parametriseringen får vi att

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_\sigma (yz, -x^2y, x^2+x^2z+z)\cdot\mathbf{n}\,dS =$$

$$= -\iint_{u^2+v^2\le 2}(0,-u^2v,u^2)\cdot(0,0,1)\,dudv = -\iint_{u^2+v^2\le 2} u^2\,dudv =$$

(inför polära koordinater, $u=\rho\cos\theta$, $v=\rho\sin\theta$)

$$= -\iint_{\substack{0\le\rho\le\sqrt{2}\\ 0\le\theta<2\pi}}\rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho d\theta = -\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = -\pi. \tag{2}$$

Vidare har vi att

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_D dxdydz = \int_0^{\sqrt[4]{2}}\left(\iint_{x^2+y^2\le 4-z^4} dxdy\right)dz =$$

$$= \int_0^{\sqrt[4]{2}}\operatorname{area}(x^2+y^2\le 2-z^4)\,dz = \pi\int_0^{\sqrt[4]{2}}(2-z^4)\,dz = \pi\left[2z-\frac{1}{5}z^5\right]_0^{\sqrt[4]{2}} = \frac{8\pi}{5}\sqrt[4]{2}. \tag{3}$$

(2) och (3) insatt i (1) ger att $\displaystyle\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{8\pi}{5}\sqrt[4]{2}+\pi.$

32. Låt σ vara ytan $x^2+y^2 \le 3$, $z=1$ och låt $\mathbf{n}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till σ. Låt D vara mängden $x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z \le 1$. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz. \tag{1}$$

En parametrisering av σ är $x=u$, $y=v$, $z=1$, $u^2+v^2 \le 3$. Med $\mathbf{r}=(x,y,z)$ gäller då att $\mathbf{r}=(u,v,1)$, $\mathbf{r}'_1=(1,0,0)$, $\mathbf{r}'_2=(0,1,0)$ och $\mathbf{r}'_1\times\mathbf{r}'_2=(0,0,1)$. Eftersom ytnormalen $\mathbf{r}'_1\times\mathbf{r}'_2$ till σ pekar uppåt i den införda parametriseringen får vi att

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_\sigma (x^3+ze^{y^2}, y^3+\sqrt{1+z^2}, x^2)\cdot\mathbf{n}\,dS =$$

$$= + \iint_{u^2+v^2 \le 3} (u^3 + e^{v^2}, v^3 + \sqrt{2}, u^2) \cdot (0,0,1)\, dudv = \iint_{u^2+v^2 \le 3} u^2 \, dudv =$$

(inför polära koordinater, $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$)

$$= \iint_{\substack{0 \le \rho \le \sqrt{3} \\ 0 \le \theta < 2\pi}} \rho^2 \cos^2\theta \, \rho \, d\rho d\theta = \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{9\pi}{4}. \tag{2}$$

Vidare har vi att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_D (3x^2 + 3y^2)\, dxdydz =$$

$$3\int_{-2}^{1} \Big(\iint_{x^2+y^2 \le 4-z^2} (x^2+y^2)\, dxdy \Big) dz =$$

(inför polära koordinater, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$)

$$= 3\int_{-2}^{1} \Big(\iint_{\substack{0 \le \rho \le \sqrt{4-z^2} \\ 0 \le \theta < 2\pi}} \rho^2 \rho \, d\rho d\theta \Big) dz = 3\int_{-2}^{1} \Big(2\pi \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 \, d\rho \Big) dz =$$

$$= \frac{3\pi}{2} \int_{-2}^{1} (4-z^2)^2 \, dz = \frac{3\pi}{2} \int_{-2}^{1} (16 - 8z^2 + z^4)\, dz = \frac{459\pi}{10}. \tag{3}$$

(2) och (3) insatt i (1) ger att $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \frac{459\pi}{10} - \frac{9\pi}{4} = \frac{873\pi}{20}$.

36. Derivering ger att

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{1/2} = \frac{1}{2}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1/2} 2x = \frac{x}{r}.$$

Med hjälp av detta får vi sedan att

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1 \cdot r^3 - x \cdot 3r^2 \dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{1 \cdot r^3 - x \cdot 3r^2 \dfrac{x}{r}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

På grund av symmetri gäller vidare att

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Vi får att

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{r^2-3x^2}{r^5} + \frac{r^2-3y^2}{r^5} + \frac{r^2-3z^2}{r^5} =$$

$$= \frac{3r^2 - 3\big(x^2+y^2+z^2\big)}{r^5} = \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0.$$

Alltså gäller att $\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = 0$ för alla $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Låt nu Y_1 vara den del av klotytan $x^2+y^2+z^2 = 1$ där $z \ge 0$ och låt $\mathbf{N}_1$ vara den inåtriktade enhetsnormalen till Y_1. Eftersom ytan Y också kan skrivas $z = \big(1-x^2-y^2\big)^{1/4}$, $x^2+y^2 \le 1$, och ytan Y_1 också kan skrivas $z = \big(1-x^2-y^2\big)^{1/2}$, $x^2+y^2 \le 1$, skär ytorna Y och Y_1 båda xy-planet längs cirkeln $x^2+y^2 = 1$ och ytan Y_1 ligger innanför ytan Y. Låt D vara det slutna område som begränsas av ytorna Y och Y_1, dvs låt D vara området $\big(1-x^2-y^2\big)^{1/2} \le z \le \big(1-x^2-y^2\big)^{1/4}$, $x^2+y^2 \le 1$. Eftersom $(0,0,0) \notin D$ kan vi tillämpa divergenssatsen på vektorfältet $\mathbf{F}$ i området D och få att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N_1}\, dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\, dxdydz.$$

Enligt ovan har vi vidare att $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)=0$ för alla $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, och vi får att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=-\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N_1}\,dS. \tag{1}$$

Ytintegralen i högerledet av (1) är enkel att beräkna. Om (x,y,z) är en punkt på en klotyta med medelpunkt i origo så är vektorn från origo till punkten, dvs vektorn (x,y,z), en normalvektor till klotytan i punkten. Dvs $-\big(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\big)$ (där $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) är en inåtriktad enhetsnormalvektor till klotytan i punkten (x,y,z) på klotytan. Halvklotytan Y_1 har medelpunkt i origo och på Y_1 gäller att $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$, och alltså har vi att $\mathbf{N}_1=-(x,y,z)$ samt att $\mathbf{F}=(x,y,z)$ på Y_1. Vi får att $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N_1}=(x,y,z)\cdot\big(-(x,y,z)\big)=-(x^2+y^2+z^2)=-1$ på Y_1, och alltså att

$$\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N_1}\,dS=\iint_{Y_1}(-1)\,dS=-\iint_{Y_1}dS=-\operatorname{area}\big(Y_1\big)=-\frac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot 1^2=-2\pi. \tag{2}$$

I (2) har vi använt att ett klot med radien a har arean $4\pi a^2$. Av (1) och (2) följer att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=2\pi.$$

38. Låt σ vara den del av planet $x+2y+z=1$ som ligger innanför cylindern $x^2+y^2=1$, låt $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till σ och låt D vara projektionen av σ på xy-planet. D är området $x^2+y^2\leq 1$ i xy-planet (eftersom ∂D är projektionen av γ på xy-planet). En parametrisering av σ är $x=u$, $y=v$, $z=1-u-2v$, $u^2+v^2\leq 1$. Med $\mathbf{r}=(u,v,1-u-2v)$ har vi att $\mathbf{r}_1'=(1,0,-1)$, $\mathbf{r}_2'=(0,1,-2)$ och $\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2'=(1,2,1)$, och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2'$ till σ pekar uppåt i den införda parametriseringen. Med dessa beteckningar får vi att

$$\int_\gamma 2y\,dx-z\,dy+x^3\,dz=$$

(enligt Stokes sats)

$$=\iint_\sigma\big(\nabla\times(2y,-z,x^3)\big)\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_\sigma(1,-3x^2,-2)\cdot\mathbf{N}\,dS=$$

(enligt den införda parametriseringen av σ)

$$=+\iint_{u^2+v^2\leq 1}(1,-3u^2,-2)\cdot(1,2,1)\,dudv=-\iint_{u^2+v^2\leq 1}(6u^2+1)\,dudv=$$

(inför polära koordinater $u=\rho\cos\theta$, $v=\rho\sin\theta$)

$$=-\iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1\\0\leq\theta<2\pi}}(6\rho^2\cos^2\theta+1)\rho\,d\rho d\theta=-\iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1\\0\leq\theta<2\pi}}(6\rho^3\cos^2\theta+\rho)\,d\rho d\theta=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\bigg(\int_0^1(6\rho^3\cos^2\theta+\rho)\,d\rho\bigg)\,d\theta=-\int_0^{2\pi}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\Big)\,d\theta=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\Big(\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{2}\Big)\,d\theta=-\int_0^{2\pi}\Big(\frac{3}{4}\cos 2\theta+\frac{5}{4}+\Big)\,d\theta=-\frac{5\pi}{2}.$$

Anmärkning: Kurvan γ i denna uppgift kan ges en relativt enkel parametrisering, en parametrisering är $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1-\cos t-2\sin t$, $0\leq t\leq 2\pi$, och med hjälp av den parametriseringen kan givna kurvintegralen relativt enkelt även beräknas direkt från definitionen.

40. Låt Y beteckna den del av halvklotytan $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ för vilken $3x^2+2y^2\le 1$ och låt $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Då är

$$\int_\gamma yz\,dx+(xz+x^3)\,dy+xy\,dz = \quad \text{(Stokes sats)} \quad =$$

$$=\iint_Y (\nabla\times(yz,xz+x^3,xy))\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_Y (0,0,3x^2)\cdot\mathbf{N}\,dS=$$

(En parameterframställning av Y är $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{1-u^2-v^2}$, $3u^2+2v^2\le 1$.

$$\mathbf{r}(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}) \text{ ger } \mathbf{r}_1'=(1,0,-\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}),\ \mathbf{r}_2'=(0,1,-\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}),$$

$$\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2'=(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},1), \text{ och } \mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2' \text{ pekar uppåt.)}$$

$$=\iint_{3u^2+2v^2\le 1}(0,0,3u^2)\cdot(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},1)\,dudv=$$

$$=3\iint_{3u^2+2v^2\le 1}u^2\,dudv=$$

$$(u=\frac{1}{\sqrt{3}}s,\ v=\frac{1}{\sqrt{2}}t,\ \frac{d(u,v)}{d(s,t)}=\frac{1}{\sqrt{6}})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\iint_{s^2+t^2\le 1}s^2\,dsdt=$$

$$(s=r\cos\theta,\ t=r\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}}r^2\cos^2\theta\ r\,drd\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{\pi\sqrt{6}}{24}.$$

41. Direkt beräkning av kurvintegralen är inte så enkelt så vi försöker använda Stokes sats för att beräkna kurvintegralen. Låt Y beteckna den del av ytan $z=(500-(x+1)^4-(y+2)^4)^{1/2}$ för vilken $x^2+y^2\le 1$ och låt $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. En parameterframställning av Y är $x=u$, $y=v$, $z=(500-(u+1)^4-(v+2)^4)^{1/2}$, $u^2+v^2\le 1$. Med

$$\mathbf{r}=(u,v,\sqrt{500-(u+1)^4-(v+2)^4})$$

har vi att

$$\mathbf{r}_1'=\left(1,0,-\frac{2(u+1)^3}{(500-(u+1)^4-(v+2)^4)^{1/2}}\right),\quad \mathbf{r}_2'=\left(0,1,-\frac{2(v+2)^3}{(500-(u+1)^4-(v+2)^4)^{1/2}}\right)$$

och

$$\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2'=\left(\frac{2(u+1)^3}{(500-(u+1)^4-(v+2)^4)^{1/2}},\frac{2(v+1)^3}{(500-(u+1)^4-(v+2)^4)^{1/2}},1\right),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2'$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Med dessa beteckningar får vi att

$$\int_\gamma (x^2+z^3)\,dx+(xy^2+2yz)\,dy+(3xz^2+y^2)\,dz=$$

(enligt Stokes sats)

$$= \iint_\sigma \left(\nabla \times (x^2+z^3, xy^2+2yz, 3xz^2+y^2)\right)\cdot \mathbf{N}\, dS =$$

$$= \iint_\sigma (0,0,y^2)\cdot \mathbf{N}\, dS =$$

(enligt den införda parameterframställningen av Y)

$$= + \iint_{u^2+v^2\le 1} (0,0,v^2)\cdot \left(\frac{2(u+1)^3}{(500-(u+1)^4-(v+2)^4)^{1/2}}, \frac{2(v+2)^3}{(500-(u+1)^4-(v+2)^4)^{1/2}}, 1\right) dudv =$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1} v^2\, dudv =$$

(inför polära koordinater $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}} r^2 \sin^2\theta\, r drd\theta = \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

42. Låt σ vara den del av planet $z = 1+x+y$ som ligger innanför ytan $z = \sqrt{2x^2+4y^2}$, låt D vara projektionen av σ på xy-planet och låt $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till σ. Om $(x,y,z)\in\gamma$ så gäller $1+x+y = \sqrt{2x^2+4y^2}$, som ger

$$(1+x+y)^2 = 2x^2+4y^2 \iff 1+x^2+y^2+2x+2y+2xy = 2x^2+4y^2 \iff$$

$$x^2-2xy-2x+3y^2-2y = 1 \iff (x-(y+1))^2-(y+1)^2+3y^2-2y = 1 \iff$$

$$(x-y-1)^2+2y^2-4y = 2 \iff (x-y-1)^2+2(y-1)^2 = 4$$

D är alltså området $(x-y-1)^2+2(y-1)^2 \le 4$ i xy-planet (eftersom ∂D är projektionen av γ på xy-planet). En parametrisering av σ är $x=u$, $y=v$, $z=1+u+v$, $(u,v)\in D$. Med $\mathbf{r} = (u,v,1+u+v)$ har vi att $\mathbf{r}_1' = (1,0,1)$, $\mathbf{r}_2' = (0,1,1)$ och $\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2' = (-1,-1,1)$, och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'\times\mathbf{r}_2'$ till σ pekar uppåt i den införda parametriseringen. Med dessa beteckningar får vi att

$$\int_\gamma x^2z\, dx - y^2z\, dy + z^3\, dz =$$

(enligt Stokes sats)

$$= \iint_\sigma \left(\nabla\times(x^2z, -y^2z, z^3)\right)\cdot\mathbf{N}\, dS =$$

$$= \iint_\sigma (y^2,x^2,0)\cdot\mathbf{N}\, dS =$$

(enligt den införda parametriseringen av σ)

$$= + \iint_D (v^2,u^2,0)\cdot(-1,-1,1)\, dudv = -\iint_D (u^2+v^2)\, dudv =$$

(Gör variabelsubstitutionen $s = u-v-1$, $t = \sqrt{2}(v-1) \iff u = s + \dfrac{1}{\sqrt{2}}t + 2$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}t + 1$.

Substitutionens funktionaldeterminant är $\dfrac{d(u,v)}{d(s,t)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.)

$$= -\iint_{s^2+t^2\le 4} \left(\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}t+2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}t+1\right)^2\right)\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2\le 4} (s^2+t^2+\sqrt{2}st+4s+3\sqrt{2}t+5)\, dsdt =$$

(på grund av symmetri)

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2\le 4} (s^2+t^2+5)\, dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = \rho\cos\theta$, $t = \rho\sin\theta$.)

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{0\le\rho\le 2\\ 0\le\theta<2\pi}} (\rho^2+5)\rho\, d\rho d\theta = -\pi\sqrt{2}\int_0^2 (\rho^3+5\rho)\, d\rho = -14\pi\sqrt{2}.$$

43. Vi beräknar kurvintegralen genom att använda Stokes sats. Kurvan γ är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Vi gör på följande sätt. Skärningspunkterna mellan kurvan γ och planet $x = 0$ är de (x, y, z) för vilka $x = 0$, $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ och $3x^2 + 4y^2 = 4$, dvs punkterna $(0, -1, 1)$ och $(0, 1, 1)$. Låt γ_1 vara skärningskurvan mellan funktionsytan $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ och planet $x = 0$ från punkten $(0, -1, 1)$ till punkten $(0, 1, 1)$, dvs parabeln $z = y^2$, $x = 0$ från punkten $(0, -1, 1)$ till punkten $(0, 1, 1)$ Låt också Y vara den del av funktionsytan $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ där $3x^2 + 4y^2 = 4$, $x \ge 0$. Kurvan $\gamma \cup (-\gamma_1)$ är då en sluten kurva vars projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning, och $\gamma \cup (-\gamma_1)$ är randkurvan till ytan Y. En parametrisering av ytan Y är $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^4 + v^4}$, $3u^2 + 4v^2 \le 4$, $u \ge 0$. Med $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^4 + v^4})$ får vi att

$$\mathbf{r}'_1(u,v) = \left(1, 0, \frac{2u^3}{\sqrt{u^4+v^4}}\right), \quad \mathbf{r}'_2(u,v) = \left(0, 1, \frac{2v^3}{\sqrt{u^4+v^4}}\right) \quad \text{och}$$

$$\mathbf{r}'_1(u,v) \times \mathbf{r}'_2(u,v) = \left(-\frac{2u^3}{\sqrt{u^4+v^4}}, -, \frac{2v^3}{\sqrt{u^4+v^4}}, 1\right),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}'_1(u, v) \times \mathbf{r}'_2(u, v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_\gamma (-y^3+z^2)\, dx + (x^3y^3+x^2+3z^2)\, dy + (10z^4+2xz+6yz)\, dz$$
$$- \int_{\gamma_1} (-y^3+z^2)\, dx + (x^3y^3+x^2+3z^2)\, dy + (10z^4+2xz+6yz)\, dz = \quad (1)$$

$$= \int_{\gamma\cup(-\gamma_1)} (-y^3+z^2)\, dx + (x^3y^3+x^2+3z^2)\, dy + (10z^4+2xz+6yz)\, dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_Y \left(\nabla \times \left(-y^3+z^2, x^3y^3+x^2+3z^2, 10z^4+2xz+6yz\right)\right) \cdot \mathbf{N}\, dS =$$

$$= \iint_Y (0, 0, 3x^2y^3+2x+3y^2) \cdot \mathbf{N}\, dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y.)

$$= + \iint_{3u^2+4v^2\le 4, u\ge 0} \big(0, 0, 3u^2v^3 + 2u + 3v^2\big) \cdot \left(-\frac{2u^3}{\sqrt{u^4+v^4}}, -, \frac{2v^3}{\sqrt{u^4+v^4}}, 1 \right) dudv =$$

$$= \iint_{3u^2+4v^2\le 4, u\ge 0} (3u^2v^3 + 2u + 3v^2)\, dudv =$$

(Eftersom $3u^2v^3$ är udda i v och området $3u^2 + 4v^2 \le 4$, $u \ge 0$ är symmetriskt kring $v = 0$.)

$$= \iint_{3u^2+4v^2\le 4, u\ge 0} (2u + 3v^2)\, dudv =$$

(Gör substitutionen $s = \frac{\sqrt{3}}{2}u$, $t = v \iff u = \frac{2}{\sqrt{3}}s$, $v = t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, och $3u^2 + 4v^2 \le 4$, $u \ge 0$ övergår i $s^2 + t^2 \le 1$, $s \ge 0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}s + 3t^2 \right) \left| \frac{2}{\sqrt{3}} \right| dsdt =$$

$$= \frac{8}{3} \iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\, dsdt + 2\sqrt{3} \iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} t^2 \ dsdt =$$

(Eftersom t^2 är jämn i s och området $s^2 + t^2 \le 1$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \frac{8}{3} \iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\, dsdt + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \iint_{s^2+t^2\le 1} t^2\, dsdt =$$

$$= \frac{8}{3} \iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\, dsdt + \sqrt{3} \iint_{s^2+t^2\le 1} t^2 \ dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \le 1$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{8}{3} \iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\, dsdt + \sqrt{3} \iint_{s^2+t^2\le 1} \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \ dsdt =$$

$$= \frac{8}{3} \iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\, dsdt + \frac{\sqrt{3}}{2} \iint_{s^2+t^2\le 1} (s^2 + t^2) \ dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \frac{8}{3} \iint_{\substack{0\le r\le 1 \\ -\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{\pi}{2}}} (r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \iint_{\substack{0\le r\le 1 \\ 0\le\theta<2\pi}} r^2\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^1 r^2\, dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta + \sqrt{3}\,\pi \int_0^1 r^3\, dr =$$

$$= \frac{8}{3} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \Big[\sin\theta \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{3}\,\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \frac{16}{9} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}.$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 0$, $y = t$, $z = t^2$, $-1 \le t \le 1$, och den ger att

$$\int_{\gamma_1} (-y^3 + z^2)\, dx + (x^3y^3 + x^2 + 3z^2)\, dy + (10z^4 + 2xz + 6yz)\, dz = \tag{2}$$

$$= \int_{-1}^{1} \big((0 + 3t^4) \cdot 1 + (10t^8 + 6t^3) \cdot 2t \big)\, dt = \int_{-1}^{1} (20t^9 + 15t^4)\, dt =$$

(Eftersom $20t^9$ är udda i t och $15t^4$ är jämn i t och intervallet $-1 \le t \le 1$ är symmetriskt kring $t = 0$.)

$$= \int_{-1}^{1} 15t^4\,dt = 2\int_0^1 15t^4\,dt = \int_0^1 30t^4\,dt = \Big[6t^5\Big]_0^1 = 6$$

Av (1) och (2) följer att

$$\int_\gamma (-y^3 + z^2)\,dx + (x^3y^3 + x^2 + 3z^2)\,dy + (10z^4 + 2xz + 6yz)\,dz = 6 + \frac{16}{9} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} = \frac{70}{9} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}.$$

44. För att undersöka om det finns en potential $\varphi(x,y,z)$ studerar vi systemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= e^x \ln z + y^3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 3xy^2 + z \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \frac{e^x}{z} + y \end{aligned}$$

Första ekvationen ger $\varphi(x,y,z) = e^x \ln z + xy^3 + \psi(y,z)$ där $\psi(y,z)$ är en godtycklig funktion av (y,z). Tillsammans med andra ekvationen fås sedan att $\varphi(x,y,z) = e^x \ln z + xy^3 + yz + \omega(z)$ där $\omega(z)$ är en godtycklig funktion av z. Till slut ger sista ekvationen att $\varphi(x,y,z) = e^x \ln z + xy^3 + yz + C$ där C är en godtycklig konstant. Givna vektorfältet $\mathbf{F}$ är således ett potentialfält och alltså gäller att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(1,1,e) - \varphi(0,0,1) = e + 1 + e - 0 = 2e + 1$.

46. Låt σ vara den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger innanför γ, låt D vara projektionen av σ på xy-planet och låt $\mathbf{n}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till σ. En parametrisering av σ är $x = u$, $y = v$, $z = 1 - u - v$, $(u,v) \in D$. Med $\mathbf{r} = (x,y,z)$ har vi att $\mathbf{r} = (u, v, 1 - u - v)$, $\mathbf{r}_1' = (1,0,-1)$, $\mathbf{r}_2' = (0,1,-1)$ och $\mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2' = (1,1,1)$ och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2'$ till σ pekar uppåt i den införda parametriseringen. Med dessa beteckningar får vi att

$$\int_\gamma (6xy^2 + z^3)\,dx + (11z - 12xy^2)\,dy - 6x^2y\,dz =$$

(enligt Stokes sats)

$$= \iint_\sigma \big(\nabla \times (6xy^2 + z^3, 11z - 12xy^2, -6x^2y)\big)\cdot \mathbf{n}\,dS =$$

$$= \iint_\sigma (-6x^2 - 11, 12xy + 3z^2, -12y^2 - 12xy)\cdot \mathbf{n}\,dS =$$

(enligt den införda parametriseringen av σ)

$$= + \iint_D (-6u^2 - 11, 12uv + 3(1-u-v)^2, -12v^2 - 12uv)\cdot(1,1,1)\,dudv =$$

$$= \iint_D \big(-11 - 6u^2 - 12v^2 + 3(1-u-v)^2\big)\,dudv.$$

Men

$$-11 - 6u^2 - 12v^2 + 3(1-u-v)^2 = -8 - 3u^2 + 6uv - 9v^2 - 6u - 6v =$$

$$= -8 - 3(u - v + 1)^2 + 3(-v+1)^2 - 9v^2 - 6v = -5 - 3(u - v + 1)^2 - 6v^2 - 12v =$$

$$= 1 - 3(u-v+1)^2 - 6(v+1)^2.$$

Det följer att

$$\int_\gamma (6xy^2 + z^3)\,dx + (11z - 12xy^2)\,dy - 6x^2y)\,dz =$$

$$= \iint_D \big(1 - 3(u-v+1)^2 - 6(v+1)^2\big)\,dudv.$$

Eftersom γ är en godtycklig enkel sluten positivt orienterad kurva på planet $x+y+z=1$ är den ovan införda mängden D en godtycklig begränsad öppen enkelt sammanhängande delmängd av planet. Av ovanstående resonemang och räkningar följer därför att det givna problemet är ekvivalent med att bestämma supremumvärdet av alla de värden som dubbelintegralen

$$\iint_D \big(1 - 3(u-v+1)^2 - 6(v+1)^2\big)\,dudv. \tag{1}$$

kan anta då D varierar över alla begränsade öppna enkelt sammanhängande delmängder av uv-planet. Men dubbelintegralen (1) blir uppenbarligen maximal då D är mängden $1-3(u-v+1)^2-6(v+1)^2 > 0 \Leftrightarrow 3(u-v+1)^2+6(v+1)^2 < 1$. Eftersom mängden $3(u-v+1)^2+6(v+1)^2 < 1$ är begränsad öppen och enkelt sammanhängande följer att värdet av dubbelintegralen (1) för detta D är det sökta supremumvärdet. Vi beräknar nu supremumvärdet. För att göra det gör vi först variabelsubstitutionen $s = \sqrt{3}(u-v+1)$, $t = \sqrt{6}(v+1)$, som ger att

$$\frac{d(s,t)}{d(u,v)} = 3\sqrt{2}\,, \qquad \frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\frac{d(s,t)}{d(u,v)}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Efter gjord variabelsubstitution får vi alltså enligt formeln för variabelsubstitution i dubbelintegral att det sökta supremumvärdet =

$$\iint_{s^2+t^2\le 1} (1 - s^2 - t^2)\left|\frac{1}{3\sqrt{2}}\right| dudv$$

Övergång till polära koordinater ger sedan dubbelintegralen

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_{\substack{0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}} (1-\rho^2)\rho\,d\rho d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\int_0^1 (\rho - \rho^3)\,d\rho = \frac{\pi\sqrt{2}}{12},$$

vilket alltså är det sökta supremumvärdet.

48. Sätt $\mathbf{F} = \big(-4x^2y + xyz + z^2 + y, 4xy^2 - x^2z - x + z, 2xz\big)$, så att den givna kurvintegralen är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Eftersom $\mathbf{R}^3$ är en öppen, bågvis och enkelt sammanhängande mängd är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$ precis om $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ i hela $\mathbf{R}^3$. (I en öppen bågvis men ej enkelt sammanhängande mängd är $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ i mängden ett nödvändigt men ej tillräckligt villkor för kurvintgralens oberoende av vägen.) Beräkning ger att

$$\nabla\times\mathbf{F} = (D_1, D_2, D_3)\times\big(-4x^2y + xyz + z^2 + y, 4xy^2 - x^2z - x + z, 2xz\big) =$$

$$= (x^2 - 1, xy, 4x^2 + 8xy - 3xz - 2) \ne (0,0,0),$$

och alltså är kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ inte oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$.

Vi visar nu att kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen för kurvor γ på cylinderytan $x^2+y^2=1$ genom att visa att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje enkel sluten kurva γ på cylinderytan. Vi gör det genom att använda Stokes sats. Gradienten av x^2+y^2, dvs vektorn $2(x,y,0)$, är en normalvektor till cylinderytan $x^2+y^2=1$ i en punkt (x,y,z) på cylinderytan. Denna normalvektor är utåtriktad och har längd 2 i varje punkt (x, y, z) på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$. Den utåtriktade enhetsnormalvektorn till cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ i en punkt (x, y, z) på cylinderytan är alltså $\mathbf{N} = (x, y, 0)$. För denna utåtriktade enhetsnormalvektor får vi att

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = (x^2 - 1, xy, 4x^2 + 8xy - 3xz - 2) \cdot (x, y, 0) = \tag{1}$$

$$= x^3 - x + xy^2 = x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \quad \text{i varje punkt } (x, y, z) \text{ på cylinderytan } x^2 + y^2 = 1.$$

Låt nu γ vara en enkel sluten kurva på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$. Vi får två fall.

Fall 1. Kurvan γ omsluter inte cylinderaxeln (z-axeln). Låt Y vara den del av cylinderytan som γ omsluter. Då är

$$\pm \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS = 0$$

enligt Stokes sats och (1). Plus- respektive minustecknet gäller om γ har positiv respektive negativ orientering i förhållande till Y och $\mathbf{N}$. Således är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = 0$ i detta fall.

Fall 2. Kurvan γ omsluter cylinderaxeln (z-axeln). Låt Γ vara cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med riktning moturs i xy-planet. För godtyckligt reellt tal a låt vidare Γ_a vara cirkeln $x^2 + y^2 = 1$, $z = a$ med riktning sådan att projektionen av Γ_a på xy-planet har riktning moturs. Då är kurvan Γ_a en kurva på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$, kurvan Γ_a omsluter cylinderaxeln och det gäller att

$$\int_{\Gamma_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{\Gamma_a} (-4x^2 y + xyz + z^2 + y) \, dx + (4xy^2 - x^2 z - x + z) \, dy + 2xz \, dz = \tag{2}$$

$$= \int_\Gamma (-4x^2 y + xya + a^2 + y) \, dx + (4xy^2 - x^2 a - x + a) \, dy =$$

(Enligt Greens formel.)

$$= \iint_{x^2 + y \leq 1} \big(4y^2 - 2xa - 1 - (-4x^2 + xa + 1)\big) \, dxdy =$$

$$= \iint_{x^2 + y \leq 1} \big(4(x^2 + y^2) - 3xa - 2\big) \, dxdy =$$

(Eftersom $3xa$ är udda i x och området $x^2 + y^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $x = 0$.)

$$= \iint_{x^2 + y \leq 1} \big(4(x^2 + y^2) - 2\big) \, dxdy =$$

(Inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \big(4r^2 - 2\big) \, r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 (4r^3 - 2r) \, dr = 2\pi \Big[r^4 - r^2\Big]_0^1 = 0$$

för godtyckligt reellt tal a. Låt nu talet a vara sådant att kurvan Γ_a helt ligger nedanför kurvan γ på cylinderytan (om a är tillräckligt stort och negativt gäller det säkert), och låt Y vara den del av cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ som ligger mellan de båda kurvorna γ och Γ_a. Då gäller att

$$\pm \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{\Gamma_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS \tag{3}$$

enligt Stokes sats. Plus- respektive minustecknet gäller om γ har positiv respektive negativ orientering i förhållande till Y och $\mathbf{N}$. Tillsammans visar (1), (2) och (3) att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = 0$ även i detta fall.

Av fall 1 och fall 2 följer att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = 0$ för varje enkel sluten kurva γ på cylinderytan, och således att kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ är oberoende av vägen för kurvor γ på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$.

Vi beräknar nu värdet av kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ då γ är en kurva på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1, 0, 0)$ på cylinderytan till en punkt (a, b, c) på cylinderytan. Låt $I(a, b, c)$ beteckna detta värde. Vi beräknar $I(a, b, c)$ genom att beräkna värdet av kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ för någon lämplig väg γ på cylinderytan från punkten $(1, 0, 0)$ på cylinderytan till punkten (a, b, c) på cylinderytan. Vilken sådan kurva γ vi väljer spelar ingen roll eftersom $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ enligt första delen av uppgiften har samma värde för varje sådan kurva γ. Eftersom punkten (a, b, c) är en punkt på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ och alltså $a^2 + b^2 = 1$ är $a = \cos t_0$ och $b = \sin t_0$ för något tal $t_0 \in [0, 2\pi[$. Låt γ_1 vara cirkelbågen $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $0 \le t \le t_0$, och låt γ_2 vara räta linjen $x = a$, $y = b$, $z = t$, $t \in [0, t_0]$ från punkten $(a, b, 0)$ till punkten (a, b, c). Då är $\gamma_1 \cup \gamma_2$ en kurva på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1, 0, 0)$ på cylinderytan till punkten (a, b, c) på cylinderytan, och med hjälp av denna kurva får vi att

$$I(a, b, c) = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} =$$

$$= \int_{\gamma_1} (-4x^2 y + xyz + z^2 + y)\, dx + (4xy^2 - x^2 z - x + z)\, dy + 2xz\, dz$$

$$+ \int_{\gamma_2} (-4x^2 y + xyz + z^2 + y)\, dx + (4xy^2 - x^2 z - x + z)\, dy + 2xz\, dz =$$

$$= \int_0^{t_0} \big((-4\cos^2 t \sin t + \sin t)(-\sin t) + (4\cos t \sin^2 t - \cos t)\cos t\big)\, dt + \int_0^c 2at\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0} \big((8\cos^2 t \sin^2 t - (\cos^2 t + \sin^2 t)\big)\, dt + ac^2 =$$

(Använd att $8\cos^2 t \sin^2 t - (\cos^2 t + \sin^2 t) = 2(2\cos t \sin t)^2 - 1 = 2\sin^2 2t - 1 = -\cos 4t$.)

$$= \int_0^{t_0} (-\cos 4t)\, dt + ac^2 = \left[-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{t_0} + ac^2 = -\frac{1}{4}\sin 4t_0 + ac^2 =$$

(Använd att $\sin 4t = 2\cos 2t \sin 2t = 2(\cos^2 t - \sin^2 t) 2\cos t \sin t = 4\cos^3 t \sin t - 4\cos t \sin^3 t$.)

$$= -\cos^3 t_0 \sin t_0 + \cos t_0 \sin^3 t_0 + ac^2 = -a^3 b + ab^3 + ac^2.$$

52. Sätt $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{G}$. Då gäller enligt angivna förutsättningar

i) $\mathbf{H} \in C^1(K)$, $\mathbf{H} \in C(K \cup Y)$

ii) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ i K

iii) $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ i K

iv) $\mathbf{H} \cdot \mathbf{N} = 0$ på Y.

Eftersom mängden K är en öppen enkelt sammanhängande mängd och $\mathbf{H} \in C^1(K)$ följer av ii) att kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{H} \cdot \mathbf{dr}$$

är oberoende av vägen för kurvor Γ i K. Definiera funktionen φ i $K \cup Y$ genom att sätta

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} \mathbf{H} \cdot \mathbf{dr} \tag{1}$$

för alla $(x,y,z)\in K\cup Y$, där (a,b,c) är en fix punkt i K och högerledet i (1) betecknar kurvintegralen av $\mathbf{H}$ längs någon väg i K från (a,b,c) till (x,y,z). (Vilken väg i K från (a,b,c) till (x,y,z) som väljs spelar ingen roll eftersom kurvintegralen är oberoende av vägen för kurvor i K.) Den så definierade funktionen φ är då en potential till $\mathbf{H}$ i K, dvs det gäller att $\mathbf{H}=\nabla\varphi$ i K. Eftersom $\mathbf{H}\in C^1(K)$ och $\mathbf{H}=\nabla\varphi$ i K följer att $\varphi\in C^2(K)$. Vidare ger $\mathbf{H}\in C(K\cup Y)$ och definitionen av φ att $\varphi\in C(K\cup Y)$. För funktionen φ gäller således att

$\alpha)$ $\varphi\in C(K\cup Y)$

$\beta)$ $\varphi\in C^2(K)$

$\gamma)$ $\mathbf{H}=\nabla\varphi$ i K.

Vi kan nu få följande likhetskedja

$$0\overset{a)}{=}\iint_Y \varphi\,(\mathbf{H}\cdot\mathbf{N})\,dS=\iint_Y(\varphi\,\mathbf{H})\cdot\mathbf{N}\,dS\overset{b)}{=}\iint_Y(\varphi\,\nabla\varphi)\cdot\mathbf{N}\,dS\overset{c)}{=}$$

$$=\iiint_K \nabla\cdot(\varphi\,\nabla\varphi)\,dx\,dy\,dz\overset{d)}{=}\iiint_K\big(\varphi\,(\nabla\cdot(\nabla\varphi))+|\nabla\varphi|^2\big)\,dx\,dy\,dz\overset{e)}{=}$$

$$=\iiint_K\big(\varphi\,(\nabla\cdot\mathbf{H})+|\nabla\varphi|^2\big)\,dx\,dy\,dz\overset{f)}{=}\iiint_K|\nabla\varphi|^2\,dx\,dy\,dz\overset{g)}{=}\iiint_K|\mathbf{H}|^2\,dx\,dy\,dz \qquad (2)$$

med följande motiveringar. Likheten a) följer av iv). Likheten b) föler av γ). Likheten c) följer av divergenssatsen. Likheten d) följer av att

$$\nabla\cdot(\varphi\,\nabla\varphi)=\nabla\cdot\big(\varphi\,(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z)\big)=\nabla\cdot(\varphi\varphi'_x,\varphi\varphi'_y,\varphi\varphi'_z)=D_x(\varphi\varphi'_x)+D_y(\varphi\varphi'_y)+D_z(\varphi\varphi'_z)=$$

$$=(\varphi'_x)^2+\varphi\varphi''_{xx}+(\varphi'_y)^2+\varphi\varphi''_{yy}+(\varphi'_z)^2+\varphi\varphi''_{zz}=\varphi(\varphi''_{xx}+\varphi''_{yy}+\varphi''_{zz})+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2+(\varphi'_z)^2=$$

$$=\varphi\big(\nabla\cdot(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z)\big)+(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z)\cdot(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z)=$$

$$=\varphi\,(\nabla\cdot(\nabla\varphi))+(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)=\varphi\,(\nabla\cdot(\nabla\varphi))+|\nabla\varphi|^2.$$

Likheten e) följer av γ). Likheten f) följer av iii). Likheten g) följer av γ). Enligt (2) gäller alltså att

$$\iiint_K|\mathbf{H}|^2\,dx\,dy\,dz=0, \qquad (3)$$

och eftersom $\mathbf{H}$ är kontinuerlig i K ($\mathbf{H}\in C^1(K)$ enligt i)), följer av (3) att $\mathbf{H}=\mathbf{0}$ i K. Men enligt i) har vi även att $\mathbf{H}\in C(K\cup Y)$, vilket tillsammans med att $\mathbf{H}=\mathbf{0}$ i K ger att $\mathbf{H}=\mathbf{0}$ i $K\cup Y$, dvs vi har att $\mathbf{F}=\mathbf{G}$ i $K\cup Y$.