Variabelsubstitution.

Vi påminner först om envariabelfallet:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt$$

Det finns en liknande formel i två variabler som både är betydligt svårare att visa och som kräver lite fler förutsättningar. Antag att $\Phi = (g,h): E \to D$ är en C^1-bijektion där D och E antas begränsade. Då gäller (f kontinuerlig)

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(g(u,v),h(u,v))\,|J_\Phi|\,dudv$$

där $J_\Phi = \dfrac{d(g,h)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial h}{\partial v} - \dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}$.

Variabelsubstitutionsformeln för trippelintegraler ser ut så här:

$$\iiint_D f\,dxdydz = \iiint_E f \circ \Phi\,|J_\Phi|\,dudvdw$$

där $\Phi: E \longrightarrow D$ är en C^1-bijektion.

En intuitiv motivering för formeln:

Antag att vi delar upp D och E i småbitar

$D = \bigcup D_\alpha$ och $E = \bigcup E_\alpha$ så att Φ_α är en bijektion mellan D_α och E_α. Enligt tolkningen av funktionaldeterminant som areaförstoringsfaktor gäller $\mu(D_\alpha) \approx |J_\Phi| \mu(E_\alpha)$ där J_Φ beräknas i någon punkt i E_α. Om vi använder approximation med Riemannsummor fås

$$\iint_D f(x,y)dxdy \approx \sum f(x_\alpha, y_\alpha)\mu(D_\alpha) \approx$$

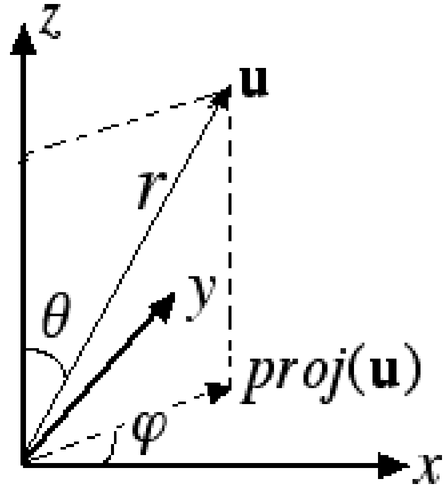
$$\approx \sum f(g(u_\alpha, v_\alpha), h(u_\alpha, v_\alpha)) | J_\Phi | \mu(E_\alpha) \approx$$

$$\approx \iint_E f(g(u,v), h(u,v)) | J_\Phi | dudv$$

Ex 1. $\iint_D (x^2 + y^2)^3 dxdy$ där

$D = \left\{(x,y): 1 \le x^2 - y^2 \le 4, xy \le 1, x > 0, y > 0\right\}$.

För trippel-integraler använder man i stället <u>rymdpolära</u> eller <u>sfäriska</u> koordinater:



$x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cos\theta$

r definieras här som längden av vektorn $\mathbf{u}$, θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och z -axeln, och φ är vinkeln mellan projektionen av $\mathbf{u}$ på xy -planet och positiva x-axeln (i positiv led). Vi kan anta att $0 \le r, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$.
För att kunna utföra variabelsubstitutioner måste vi beräkna Jacobianen:

$$J = \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Ex 2. $$\iiint_{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz =$$

$$= \int_1^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-r^2}}{r} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr =$$

$$= \int_1^2 re^{-r^2} dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\left(e^{-1} - e^{-4}\right).$$

Det föreligger nu inga hinder för att generalisera integrationsteorin till fyra, fem eller n dimensioner. Sådana integraler är mycket vanligt förekommande i tillämpningarna.
Ex 3. Beräkna kvadruppel-integralen

$$\int_{x^2+y^2+z^2+w^2 \le 1} (x^2+y^2+z^2+w^2)^3\, dxdydzdw.$$

(Observera att man vid integraler i dimension ≥4 oftast bara skriver ett $\int$.)
Även i det här fallet är det enklast att införa "rymdpolära" koordinater:

$$\begin{cases} x = r\sin\psi\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\psi\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\psi\cos\varphi \\ w = r\cos\psi \end{cases} \qquad \left|\frac{d(x,y,z,w)}{d(r,\psi,\varphi,\theta)}\right| = r^3\sin^2\psi\sin\varphi$$

ψ är vinkeln mellan vektorn (x,y,z,w) och w-axeln och φ,θ definieras som vanligt m a p projektionen av (x,y,z,w) ned på xyz-rummet.

När antalet dimensioner n är stort blir det besvärligt att hålla reda på vinkel-variablerna. Man brukar slå ihop dem till ett "yt-mått" $d\sigma$ på enhets-sfären S^{n-1} och skriva $dV = r^{n-1}drd\sigma$. Speciellt får vi om h bara beror på $r = |x|$:

$$\int_{|\bar{x}|\leq R} h(|\bar{x}|)dV = \sigma(S^{n-1})\int_0^R h(r)r^{n-1}dr \qquad \text{(jrf Ex 2).}$$

Ex 4. Beräkna $\mu_n = \int_{|\bar{x}|\leq 1} 1\, d\bar{x}_n$ för alla n≥1.

Generaliserade dubbelintegraler.

Precis som i envariabelteorin kan man ha behov av att utvidga integralen till ickekompakta mängder och obegränsade funktioner. Dessa generaliserade integraler är dock snarare gränsvärden än riktiga integraler.

Ex 5.
$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy =$$
$$= \lim_{r\to\infty}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R e^{-r^2}\,rdr = 2\pi\lim_{R\to\infty}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \pi.$$

I detta exempel är det naturligt att betrakta planet $\mathbf{R}^2$ som ett gränsfall av cirkelskivor. För allmännare områden behöver vi

Definition. En <u>uttömmande följd</u> i D är en växande följd av kompakta mängder D_n sådan att $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$ och sådan att för varje kompakt $K \subset D$ det finns ett tal n så att $K \subset D_n$.

Definition. Låt $f \ge 0$. $\iint_D f\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f\,dxdy$.

Om $f = f_+ - f_-$ där $f_+, f_- \ge 0$, $\iint_D f = \iint_D f_+ - \iint_D f_-$.

Ex 6. $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1}\,dxdy$.

Ex 7. $\displaystyle\iint_{|y|\le(1+x^2)^{-2}} x^2\,dxdy$.