Problemen i exempel 2 och 3 i avsnitt 8.1 kan lösas på ett annat sätt än i boken.

Exempel 2. Substituera $u = x$, $v = y$, $w = z - x^2$. Funktionaldeterminanten blir då 1 och kroppens volym

$$\mu(K) = \iiint_K dxdydz = \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} dudvdw = \frac{4\pi}{3} \text{ (enhetsklotets volym).}$$

Exempel 3. Kroppen beskrivs av olikheterna $x^2 + z^2 \le 1$, $y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$. En annan (och ekvivalent) beskrivning är $-\sqrt{1-z^2} \le y \le \sqrt{1-z^2}$, $x^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$. Nu kan vi integrera:

$$\begin{aligned}\mu(K) &= \iiint_K dxdydz = \iint_{\substack{x^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy\right) dxdz = [\text{symmetri}]\\ &= 2\iint_{\substack{x^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy\right) dxdz = 2\iint_{\substack{x^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} \sqrt{1-z^2}\, dxdz = [\text{symmetri igen}]\\ &= 4\iint_{\substack{x^2+z^2\le 1\\ x,z\ge 0}} \sqrt{1-z^2}\, dxdz = 4\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2}\, dx\right) dz = 4\int_0^1 (1-z^2)\, dz = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Rekursionsformel för volym. Formeln finns i avsnitt 7.2, exempel 7. Här kommer några förtydliganden.
Låt B_k^R beteckna det k-dimensionella klotet med radien R och medelpunkten i origo och låt $h(r)$ vara en funktion som bara beror på $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$ (dvs. på avståndet till origo). Vi vill finna en formel för $\underbrace{\int \cdots \int_{B_k^R}}_{k \text{ integraltecken}} h(r)\, dx_1 \ldots dx_k$. Låt Δr vara litet och betrakta det tunna sfäriska skalet mellan r och $r + \Delta r$. Sätt $V(r) = \mu(B_k^r)$. Det bidrag till integralen som kommer från skalet är $\approx h(r)(V(r+\Delta r) - V(r)) \approx h(r)V'(r)\Delta r$. Eftersom $V(r) = \mu(B_k)r^k$, där $B_k = B_k^1$ är det k-dimensionella enhetsklotet, leder detta till formeln

$$\int \cdots \int_{B_k^R} h(r)\, dx_1 \ldots dx_k = \int_0^R h(r)V'(r)\, dr = k\mu(B_k)\int_0^R h(r)r^{k-1}\, dr \tag{1}$$

(jfr. med formel (7) i avsnitt 7.2). Tillvägagångssättet är ungefär detsamma som när man härleder formeln för rotationsvolym i Analys I.
Nu kan vi härleda rekursionsformeln för det n-dimensionella enhetsklotet. Låt C_r beteckna cirkelskivan $x_{n-1}^2 + x_n^2 \le 1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-2}^2 = 1 - r^2$. Vi får

$$\begin{aligned}\mu(B_n) &= \int \cdots \int_{B_n} dx_1 \ldots dx_n = \int \cdots \int_{B_{n-2}} \left(\iint_{C_r} dx_{n-1}dx_n\right) dx_1 \ldots dx_{n-2}\\ &= \int \cdots \int_{B_{n-2}} \underbrace{\pi(1-r^2)}_{h(r)=\text{cirkelskivans area}} dx_1 \ldots dx_{n-2} = [\text{enl. (1) med } k = n-2]\\ &= \pi(n-2)\mu(B_{n-2})\int_0^1 (1-r^2)r^{n-3}\, dr = \pi(n-2)\mu(B_{n-2})\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2\pi}{n}\mu(B_{n-2}).\end{aligned}$$

Det här är rekursionsformeln i mitten av sid. 297.

Symmetrier. De problem vi kommer att möta i fortsättningen innehåller ofta symmetrier. Man kan underlätta beräkningar genom att använda följande två formler. Låt f vara en integrerbar funktion av en variablel, definierad på intervallet $[-a, a]$. Då gäller:

- Om f är en udda funktion, så är $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.
- Om f är en jämn funktion, så är $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.