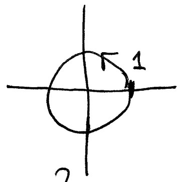
Räkneövning 15-04-20

9.47 $F = \left((ax+by)^3, (ax+by)^3 \right)$, γ , $a^2+b^2 \le 1$

mellan vilka värden kan $\int_\gamma F\,dr$ variera?

$$\int_\gamma F\,dr = \int_\gamma (ax+by)^3 dx + (ax+by)^3 dy = \iint_D 3(ax+by)^2 b - 3(ax+by)^2 a \; dx\,dy$$

D… enhetscirkelskiva

$$= \iint_D 3(ax+by)^2 (b-a)\, dx\,dy = 3(b-a) \int_0^1 \int_0^{2\pi} (ar\cos t + br\sin t)^2 r\,dt\,dr$$

$$= 3(b-a) \int_0^1 \int_0^{2\pi} a^2 r^3 \cos^2 t + 2ab r^3 \cos t \sin t + b^2 r^3 \sin^2 t \; dt\,dr =$$

$$= 3(b-a) \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 t + 2ab \cos t \sin t + b^2 \sin^2 t \; dt$$

$$= 3(b-a) \frac{1}{4} \left(a^2 \pi + 0 + b^2 \pi \right) = \frac{3\pi}{4} (b-a)(a^2+b^2)$$

störst: , $\frac{3\pi}{4}$ är ointressant

minst: $\rightsquigarrow$ undersök $(b-a)(a^2+b^2) = g(a,b)$ på D

$$\mathring{D}: \quad g_a = -(a^2+b^2) + (b-a)2a = -b^2 + 2ab - 3a^2 = -(b-a)^2 - 2a^2 = 0$$

$$g_b = (a^2+b^2) + (b-a)2b = a^2 - 2ab + 3b^2 = (a-b)^2 + 2b^2 = 0$$

$$(b-a)^2 + 2a^2 = 0 \qquad a^2 = b^2 \qquad a = \pm b$$
$$(b-a)^2 + 2b^2 = 0$$

$$g(a,a) = 0 \qquad g(a,-a) = -2a\,2a^2 = -4a^3$$

$$\partial D: \quad g(\cos t, \sin t) \overset{?}{=} \sin t - \cos t$$

$$\partial_t g(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t = 0 \iff \cos t = -\sin t \iff \tan t = -1$$

$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$$\Rightarrow g\left(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$$

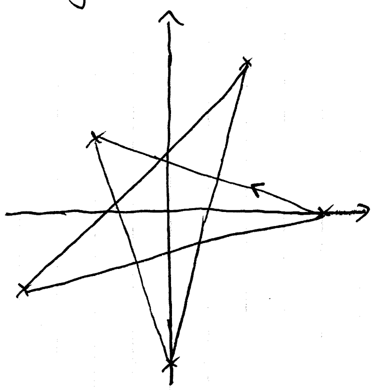
$$g\left(\cos\frac{7\pi}{4}, \sin\frac{7\pi}{4}\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

obs: det är också max/min värdet vi får från $\mathring{D}$

$\Rightarrow$ integralen varierar mellan $\frac{-3\sqrt{2}}{4}\pi$ och $\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$

9.51 $\displaystyle\int_\gamma \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2}$

$\gamma: (2,0) \to (-1,1) \to (0,-2) \to (1,2) \to (-2,-1) \to (2,0)$



2 varv runt origo

$$\int_\gamma \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2} = \int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

elektriskt fält E magnetfält B

vi vet: E är konservativt, γ är sluten $\Rightarrow \int_\gamma E\,dr = 0$

B är ej konservativt och $\displaystyle\int_{x^2+y^2=1} B\,dr = 2\pi$

$$\Rightarrow \int_\gamma B\,dr = 2 \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \ldots = 4\pi$$

10.4 $F=(-y,x,0)$

a) γ: $x^2+y^2=R^2$, $z=1$, ett varv i positiv riktning

$$\int_\gamma F\,dr = \begin{bmatrix} x=R\cos t & dx=-R\sin t\,dt \\ y=R\sin t & dy=R\cos t\,dt \\ z=1 & dz=0\,dt \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} -R\sin t\,(-R\sin t)+R\cos t\,R\cos t\,dt$$

$= R^2 2\pi$

b) γ: $(0,0,1) \to (1,1,1)$ $\quad r(t)=(t,t,1)$ $\quad t\in[0,1]$

$$\int_\gamma F\,dr = \int_0^1 -t+t\,dt = 0$$

10.7 visa att $\int_\gamma x\cos z\,dx + y\sin z\,dy + z\,dz = 0$ för alla slutna γ som ligger i ett plan parallellt med xy-planet

γ: parametrisering $(f(t), g(t), z)$, $0\le t\le 1$, $dx=f'(t)\,dt$, $dy=g'(t)\,dt$

$$\int_\gamma \dots = \int_0^1 f(t)\cos z\, f'(t) + g(t)\sin z\, g'(t) + z\cdot 0\,dt$$

i planet parallellt med xy-planet gäller att z = konstant och $dz=0$

$$\Rightarrow \int_\gamma \underbrace{x\,C_1}_{=:P}\,dx + \underbrace{y\,C_2}_{=:Q}\,dy$$

$Q_x = 0 = P_y$ $\quad\Rightarrow \exists$ potential eftersom planet är enkelt sammanhäng.

$\Rightarrow$ vägintegralen beräknas som potentialen i slutpunkten minus potentialen i begynnelsepunkten $\quad$ slut = begynnelse

$\Rightarrow$ integralen är noll

$\blacksquare$