Räkneövning 15-04-27

flödesintegral $\iint_Y F \cdot N \, dS$

Y yta $\quad F$ fält $\quad N$ enhetsnormalen $\quad dS$ areaelement

(a) $\iint_Y F \cdot N \, dS = \iint_Y F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3 \, dS$

$$\left(= \iint_D (F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3)(r(s,t)) \, |r_s' \times r_t'| \, ds\,dt \right)$$

t.ex om man kan gissa enhetsnormalen direkt från geometrien

(b) $\iint_Y F \cdot N \, dS = \iint_D F(r(s,t)) \cdot \frac{r_s' \times r_t'}{|r_s' \times r_t'|} \, |r_s' \times r_t'| \, ds\,dt$

$$= \iint_D F(r(s,t)) \cdot (r_s' \times r_t') \, ds\,dt$$

t.ex. om Y är redan parametriserad och man kan lätt beräkna en normalriktning

Gauß sats (divergenssatsen)

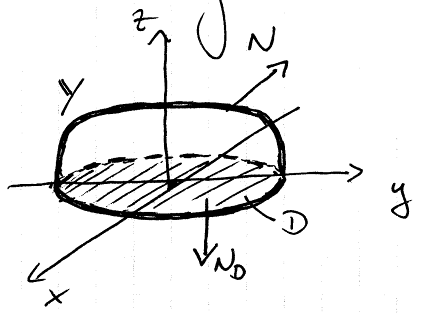
$F = (F_1, F_2, F_3)$ C^1-fält, definierat i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ öppen
$K \subset \Omega$ kompakt, ∂K består av C^1 ytor, orienterad så att normalvektorn pekar utåt

$$\Rightarrow \iint_{\partial K} F \cdot N \, dS = \iiint_K \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$$

med $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

① $\iint_Y F\cdot N\,dS \qquad F=(y^4, x^4, z^4+1) \qquad Y:\ z\geq 0,\ (x^2+y^2)^2+z^4=1$

orientering: N:s z-koordinaten är positiv



direkt beräkning:

N? parametrisering? fältet har stora exponenter

istället prova Gauss

tillägg botten $D=\{(x,y,z): (x^2+y^2)^2\leq 1,\ z=0\}=\{(x,y,z): x^2+y^2\leq 1,\ z=0\}$

Sätt $K:=\{(x,y,z): (x^2+y^2)^2+z^4\leq 1,\ z\geq 0\}$ kompakt

$\partial K = Y\cup D$ C^1 ytor

Y orienterad korrekt, D med om vi väljer $N_D=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \iint_Y F\cdot N\,dS = \iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz - \iint_D F\cdot N_D\,dS$$

$$\iint_D F\cdot N_D\,dS = \iint_D \begin{pmatrix}y^4\\x^4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}dx\,dy = -\iint_D 1\,dx\,dy =$$

$$= -\text{area}(D) = -\pi$$

$$\iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = \iiint_K 0+0+4z^3\,dx\,dy\,dz =$$

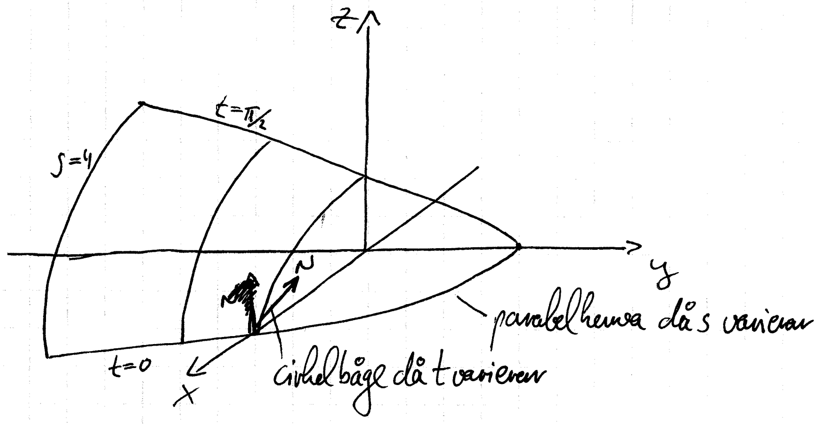
$$= \int_0^1 4z^3 \iint_{x^2+y^2\leq\sqrt{1-z^4}} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 4z^3\pi\sqrt{1-z^4}\,dz =$$

$$= \pi\left[-\frac{2}{3}(1-z^4)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \iint_Y F\cdot N\,dS = \frac{2\pi}{3}+\pi = \frac{5\pi}{3}$$

(2) $F = (x, y, z)$ $\quad Y: \begin{cases} r(s,t) = (s\cos t,\ 4-s^2,\ s\sin t) \\ 0 \le s \le 4 \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

skiss



normalvektorn: $r_s' = \begin{pmatrix} \cos t \\ -2s \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\quad r_t' = \begin{pmatrix} -s\sin t \\ 0 \\ s\cos t \end{pmatrix}$ $\quad r_s' \times r_t' = \begin{pmatrix} -2s^2\cos t \\ -s(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ -2s^2 \sin t \end{pmatrix}$

orientering: i punkten $r(2,0) = (2,0,0)$ är normalen

$$(r_s' \times r_t')(2,0) = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ vi beräknar flödet genom Y i riktning till origo

⌈ obs: fältet är riktat bort från origo $\Rightarrow$ förväntar
⌊ oss att flödet blir negativt.

flödet: $\iint_Y F \cdot N\, dS = \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (s\cos t,\ 4-s^2,\ s\sin t) \cdot (-2s^2\cos t, -s, -2s^2\sin t)\, dt\, ds$

$= \int_0^4 \int_0^{\pi/2} -2s^3 - 4s + s^3 \, dt\, ds = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{s^4}{2} - 2s^2\right]_0^4 = -80\pi$

③ $\iint_Y F\cdot N\,dS \quad F=\left(\frac{1}{3}x^3z+xy^2z+\sin y,\ x^2y+\frac{y^3}{3},\ x^2z+y^2z\right)$

Y: mantelytan av cylindern $x^2+y^2=1,\ -1\le z\le 1$; orienterad utåt

direkt: vi kan direkt gissa normalvektorns utseende: $N=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$
(jämför med en normalvektor till en cirkel i planet)

parametrisering: $r(s,t)=(\cos s,\sin s,t) \quad s\in[0,2\pi],\ t\in[-1,1]$

$r_s'=\begin{pmatrix}-\sin s\\ \cos s\\ 0\end{pmatrix} \quad r_t'=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad r_s'\times r_t'=\begin{pmatrix}\cos s\\ \sin s\\ 0\end{pmatrix}\hat{=}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ ok!

$|r_s'\times r_t'|=\sqrt{\sin^2 s+\cos^2 s}=1$

$$\iint_Y F\cdot N\,dS=\iint_Y \frac{1}{3}x^4z+x^2y^2z+\sin y\cdot x+x^2y^2+\frac{y^4}{3}+(x^2z+y^2z)\cdot 0\,dS$$

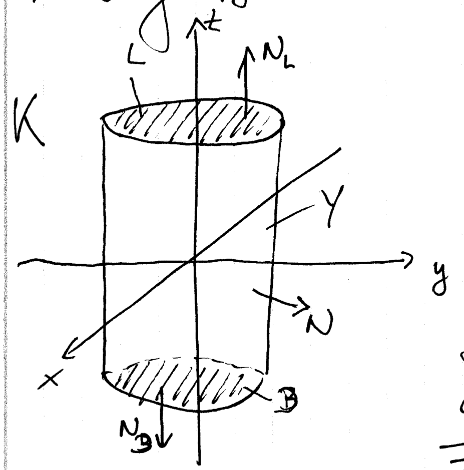
$$=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{1}{3}\cos^4 s\,t+\cos^2 s\sin^2 s\,t}_{\text{försvinner när man integrerar } t}+\sin(\sin s)\cos s+\cos^2 s\sin^2 s$$

$$+\frac{\sin^4 s}{3}\ \cancel{\ldots}\ \cancel{\ldots}\ dt\,ds$$

$$=2\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin(\sin s)\cos s}_{=(-\cos(\sin s))'\ \ldots\ \text{försvinner när man integrerar } s}+\cos^2 s\sin^2 s+\frac{1}{3}\sin^4 s\ ds=$$

$$=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\pi$$

med Gauß



tillägg en bottendel B och ett lock L

$B=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1,\ z=-1\}\quad N_B=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$L=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1,\ z=1\}\quad N_L=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$K=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1,\ -1\le z\le 1\}$ kompakt

$\partial K=Y\cup B\cup L \quad C^1$ ytor, orientering okej

$F \quad C^1$-fält

$$\Rightarrow \iint_Y F\cdot N\,dS = \iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz - \iint_B F\cdot N_B\,dS - \iint_L F\cdot N_L\,dS$$

$$\iint_L F\cdot N_L\,dS = \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=1}} F\cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1} x^2+y^2\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\,dt\,dr = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_B F\cdot N_B\,dS = \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=-1}} F\cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1} x^2+y^2\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = \iiint_K x^2z + y^2z + x^2 + y^2 + x^2 + y^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_K (x^2+y^2)(z+2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \left(\int_{-1}^1 z+2\,dz\right)\cdot\left(\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2+y^2\,dx\,dy\right) = 4\,\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \iint_Y F\cdot N\,dS = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

10.34 $F = \frac{r}{|r|^3} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

a) bestäm flödet genom $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 \le 4$, normalens z-koordinat är positiv

Y är övre delen av en sfär med radius 2

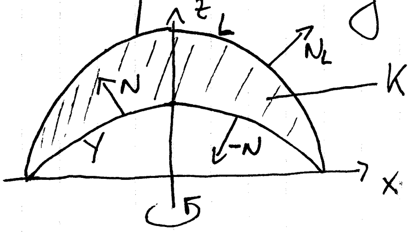
$\Rightarrow \tilde{N} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$ enhetsnormalen $N = \frac{\tilde{N}}{|\tilde{N}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{r}{|r|}$

$$\iint_Y F \cdot N \, dS = \iint_Y \frac{r}{|r|^3} \cdot \frac{r}{|r|} \, dS = \iint_Y \frac{|r|^2}{|r|^4} \, dS \underset{|r|=2}{=} \frac{1}{4} \iint_Y 1 \, dS =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \text{ area(sfär med radius 2)} = \frac{1}{8} 4\pi \cdot 2^2 = 2\pi$$

b) bestäm flödet genom $z = 1 - \frac{x^2+y^2}{4}$ $x^2+y^2 \le 4$, normalens z-koordinat är positiv

en parametrisering av Y skulle inte riktigt passa till $F \rightsquigarrow$ Gauß?



K kompakt, $\partial K = Y \cup L$ C^1 ytor

L är ytan från del (a)

F C^1 bort från origo

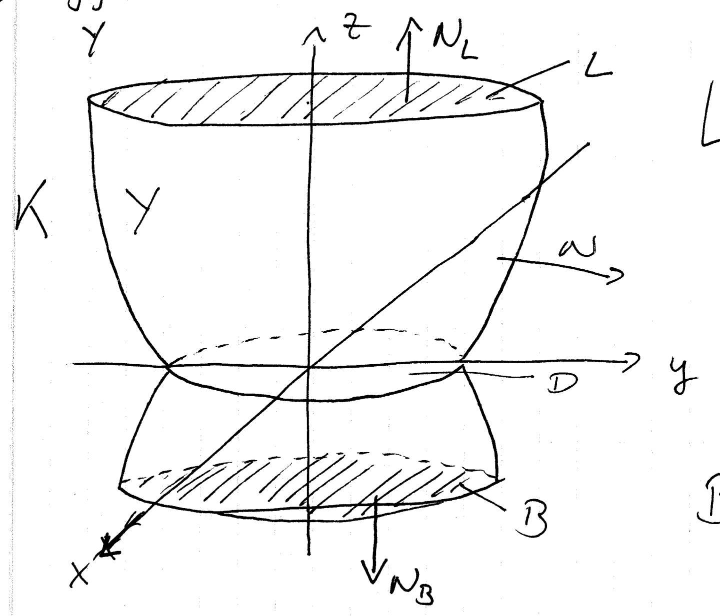
orientering passar med N_L och $-N$

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_Y F \cdot (-N) \, dS}_{= -\iint_Y F \cdot N \, dS} + \underbrace{\iint_L F \cdot N_L \, dS}_{= 2\pi \text{ från (a)}} = \iiint_K \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$$

$$\operatorname{div} F = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0$$

$$\Rightarrow \iint_Y F \cdot N \, dS = 2\pi$$

(33) $\iint\limits_Y F\cdot N\,dS$ $\quad Y:\ z^2 = (x^2+2y^2)^2 - 1 \quad -1 \le z \le 2$



$L = \{(x,y,z):\ x^2+2y^2 \le \sqrt{5},\ z=2\},\ N_L = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$K = \{(x,y,z):\ x^2+2y^2 \le \sqrt{1+z^2},\ -1\le z\le 2\}$

$D = \{(x,y,z):\ x^2+2y^2 \le 1,\ z=0\}$

$B = \{(x,y,z):\ x^2+2y^2 \le \sqrt{2},\ z=-1\},\ N_B = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$F = (x^3, y^3, x^2 z) \qquad \operatorname{div} F = 3x^2+3y^2+x^2 = 4x^2+3y^2$

Gauß: $\iint\limits_Y F\cdot N\,dS + \iint\limits_L F\cdot N_L\,dS + \iint\limits_B F\cdot N_B\,dS = \iiint\limits_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz$

vi kommer att använda elliptisk polära koordinater flera gånger:

$(*)\begin{cases} x = r\cos t & t\in[0,2\pi] \\ y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin t & r\in[?,?] \end{cases} \quad dx\,dy = \frac{r}{\sqrt{2}}\,dr\,dt$

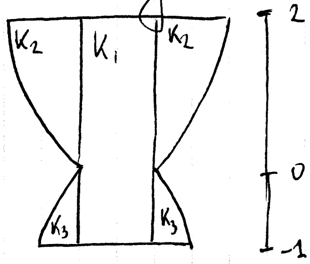
•) $\iint\limits_L F\cdot N_L\,dS = \iint\limits_L x^2\cdot 2\cdot 1\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+2y^2\le\sqrt{5}} 2x^2\,dx\,dy = \left[(*),\ r\in[0,\sqrt[4]{5}]\right]$

$= \int_0^{\sqrt[4]{5}}\int_0^{2\pi} 2r^2\cos^2 t\,\frac{r}{\sqrt{2}}\,dt\,dr = \underline{\sqrt{2}\,\pi\,\frac{5}{4}}$

•) $\iint\limits_B F\cdot N_B\,dS = \iint\limits_B x^2(-1)\cdot(-1)\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+2y^2\le\sqrt{2}} x^2\,dx\,dy = \left[(*),\ r\in[0,\sqrt[4]{2}]\right]$

$= \int_0^{\sqrt[4]{2}}\int_0^{2\pi} r^2\cos^2 t\,\frac{r}{\sqrt{2}}\,dt\,dr = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\pi\,\frac{2}{4} = \sqrt{2}\,\pi\,\frac{1}{4}$

vi delar upp K i tre delar: en central cylinder, övre delen runt denna cylinder och undre delen:



$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \qquad K_1 = D \times [-1,2]$$

$$K_2 = \left\{ 1 \le x^2+2y^2 \le \sqrt{5},\ z \in \left[\sqrt{(x^2+2y^2)^2-1},\, 2\right] \right\}$$

$$K_3 = \left\{ 1 \le x^2+2y^2 \le \sqrt{2},\ z \in \left[-1,\, -\sqrt{(x^2+2y^2)^2-1}\right] \right\}$$

$$\iiint_{K_1} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{2} \iint_{x^2+2y^2\le 1} 4x^2+3y^2 \, dx\,dy \, dz = 3\iint_{x^2+2y^2\le 1} 4x^2+3y^2 \, dx\,dy =$$

$$= \left[\circledast,\ r\in[0,1]\right] = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(4r^2\cos^2 t + \tfrac{3}{2} r^2 \sin^2 t\right)\frac{r}{\sqrt{2}} \, dt\, dr =$$

$$= \frac{33}{2\sqrt{2}}\pi \int_0^1 r^3 \, dr = \underline{\frac{33\sqrt{2}\,\pi}{16}}$$

$$\iiint_{K_2} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iint_{1\le x^2+2y^2\le\sqrt{5}} 4x^2+3y^2 \int_{\sqrt{(x^2+2y^2)^2-1}}^{2} 1 \, dz \, dx\,dy = \iint_{1\le x^2+2y^2\le\sqrt{5}} (4x^2+3y^2)\left(2-\sqrt{(x^2+2y^2)^2-1}\right) dx\,dy$$

$$= \left[\circledast,\ r\in[1,\sqrt[4]{5}]\right] = \int_1^{\sqrt[4]{5}}\int_0^{2\pi} \left(8r^2\cos^2 t + 3r^2\sin^2 t\right)\frac{r}{\sqrt{2}}\, dt\, dr - \int_1^{\sqrt[4]{5}}\int_0^{2\pi} \left(4r^2\cos^2 t + \tfrac{3}{2}r^2\sin^2 t\right)\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^4-1}\, dt\, dr$$

$$= \frac{11}{\sqrt{2}}\pi \int_1^{\sqrt[4]{5}} r^3\, dr - \frac{11}{2\sqrt{2}}\pi \int_1^{\sqrt[4]{5}} r^3\sqrt{r^4-1}\, dr =$$

$$= \frac{11}{\sqrt{2}}\pi\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right) - \frac{11}{2\sqrt{2}}\pi \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(r^4-1\right)^{3/2}\right]_1^{\sqrt[4]{5}} = \frac{11\sqrt{2}\,\pi}{2} - \frac{11\sqrt{2}\,\pi}{4}\cdot\frac{4}{3} = \underline{\sqrt{2}\,\pi\left(\frac{11}{2}-\frac{11}{3}\right)}$$

$$\iiint_{K_3} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iint_{1\le x^2+2y^2\le\sqrt{2}} 4x^2+3y^2 \int_{-1}^{-\sqrt{(x^2+2y^2)^2-1}} 1 \, dz\, dx\,dy = \iint_{1\le x^2+2y^2\le\sqrt{2}} (4x^2+3y^2)\left(1-\sqrt{(x^2+2y^2)^2-1}\right) dx\,dy$$

$$= \left[\circledast,\ r\in[1,\sqrt[4]{2}]\right] = \int_1^{\sqrt[4]{2}}\int_0^{2\pi} \left(4r^2\cos^2 t + \tfrac{3}{2}r^2\sin^2 t\right)\frac{r}{\sqrt{2}}\, dt\, dr - \int_1^{\sqrt[4]{2}}\int_0^{2\pi} \left(4r^2\cos^2 t + \tfrac{3}{2}r^2\sin^2 t\right)\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^4-1}\, dt\, dr$$

$$= \frac{11}{2\sqrt{2}}\pi \int_1^{\sqrt[4]{2}} r^3\, dr - \frac{11}{2\sqrt{2}}\pi \int_1^{\sqrt[4]{2}} r^3\sqrt{r^4-1}\, dr =$$

$$= \frac{11}{2\sqrt{2}}\pi\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right) - \frac{11}{2\sqrt{2}}\pi\,\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{11\sqrt{2}}{16}\pi - \frac{11\sqrt{2}}{24}\pi = \underline{\pi\sqrt{2}\left(\frac{11}{16}-\frac{11}{24}\right)}$$

$$\Rightarrow \iint_Y F\cdot N\, dS = \sqrt{2}\,\pi\left(\frac{33}{16}+\frac{11}{2}-\frac{11}{3}+\frac{11}{16}-\frac{11}{24}-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right) = \sqrt{2}\,\pi\left(\frac{33+88+11-20-4}{16} - \frac{88+11}{24}\right) = \sqrt{2}\,\pi\left(\frac{54}{8}-\frac{33}{8}\right) = \underline{\frac{21\sqrt{2}\,\pi}{8}}$$