Räkneövning 15-04-29

89 **Stokes sats**

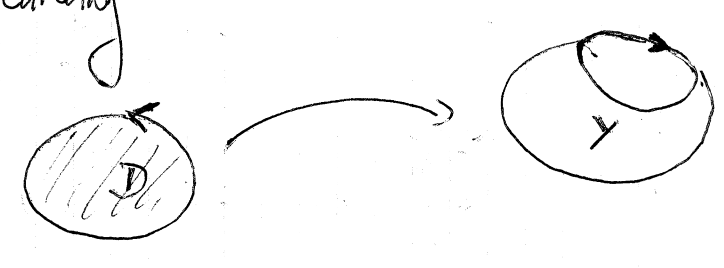
$F=(F_1,F_2,F_3)$ C^1 fält, definierat i $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ öppen

Y orienterat ytstycke i Ω, $\partial\Omega$ orienterad rand

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial Y} F\cdot dr = \iint_Y (\mathrm{rot}\, F)\cdot N\, dS$$

där $\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$

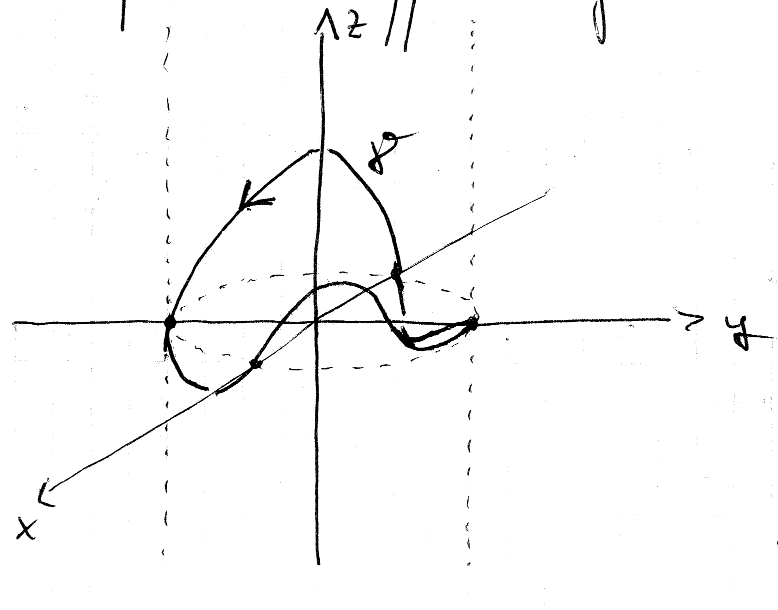
beakta orientering



39 $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$

γ... skärningskurva mellan $z=xy$ och $x^2+y^2=1$

omloppsriktning så att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning



tänk så här: på ytan $z=xy$ markerar vi projektionen av cirkeln $x^2+y^2=1$ parallellt längs z-axeln

$\Rightarrow \gamma \mathrel{\hat{=}} \partial Y$, där

$Y=\{(x,y,z): x^2+y^2\leq 1,\ z=xy\}$

direkt: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos t \sin t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi] \quad$ $\begin{array}{l} dx = -\sin t \, dt \\ dy = \cos t \, dt \\ dz = (\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt \end{array}$

$$\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot (-\sin t) + (\cos t \cdot \sin t)\cos t + \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t + \underbrace{\cos^2 t \sin t}_{\text{udda fkt på } [-\pi,\pi]} + \underbrace{\cos^3 t - \cos t \sin^2 t}_{\text{integralen över en hel period blir 0}} \, dt$$

$$= -\pi$$

Stokes: $F = (y, z, x) \quad C^1 \text{ i } \mathbb{R}^3 = \Omega$

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (-1, -1, -1)$$

parametrisering av $Y = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = xy\}$:

$$r(s,t) = \begin{pmatrix} s \\ t \\ st \end{pmatrix} \quad r_s' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad r_t' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} \quad r_s' \times r_t' = \begin{pmatrix} -t \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma = \partial Y} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_Y \text{rot } F \cdot N \, dS = \iint_Y \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t \\ -s \\ 1 \end{pmatrix} dS =$$

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 1} t + s - 1 \, ds\,dt = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{r^2 \cos\varphi + r^2 \sin\varphi}_{\text{försvinner över en hel period}} - r \, d\varphi\, dr =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\pi = -\pi$$

·) Som i två dimensioner definieras "oberoende av väg" för en kurvintegral i $\mathbb{R}^3$

·) ett potentialfält (konservativt fält) F uppfyller $F = \operatorname{grad} U$

i så fall: $\int_\gamma F\,dr = U(b) - U(a)$

Sats: F virvelfritt, dvs. $\operatorname{rot} F = 0$, i ett enkelt sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists\, U$ potential i Ω

Sats: varje potentialfält är virvelfritt

(45) $F = (y^2z^3 + 2xy,\ 2xyz^3 + x^2 + z^2,\ 3xy^2z^2 + 2yz + 3z^2 + x)$

a) bestäm en potential eller visa att en sådan existerar ej

b) $\int_\gamma F\,dr$ då γ är kurvan $x = \frac{2}{1+t^2}$, $y = \frac{2}{1+t^4}$, $z = \frac{2}{(1+t^2)^2}$, $0 \le t \le 1$

a) $\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$

$= \left(6xyz^2 + 2z - (6xyz^2 + 2z),\ 3y^2z^2 - (3y^2z^2 + 1),\ 2yz^3 + 2x - (2yz^3 + 2x)\right)$

$= (0, -1, 0) \Rightarrow \operatorname{rot} F = 0$ dvs F är ej virvelfritt

$\overset{\text{Sats}}{\Longrightarrow} \nexists$ potential

b) vi ser att ett problem uppstår pga den sista x-termen i F:s tredje koordinat.

vi delar därför F i två delar:

$$F = \underbrace{F - (0,0,x)}_{\tilde{F}} + \underbrace{(0,0,x)}_{G}$$

nu ser vi: $\operatorname{rot} \tilde{F} = (0,0,0)$, $\mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande

$\Rightarrow \exists\, U$ potential

$$\begin{cases} U_x = y^2z^3 + 2xy \\ U_y = 2xyz^3 + x^2 + z^2 \\ U_z = 3xy^2z^2 + 2yz + 3z^2 \end{cases} \Rightarrow U = xy^2z^3 + x^2y + \varphi(y,z)$$

$$\left(xy^2z^3 + x^2y + \varphi(y,z)\right)_y = 2xyz^3 + x^2 + \varphi_y(y,z) \overset{!}{=} 2xyz^3 + x^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(y,z) = yz^2 + \psi(z)$$

$$\left(xy^2z^3 + x^2y + yz^2 + \psi(z)\right)_z = 3xy^2z^2 + 2yz + \psi_z(z) \overset{!}{=} 3xy^2z^2 + 2yz + 3z^2$$

$$\Rightarrow \psi(z) = z^3 + C$$

$$\Rightarrow U = xy^2z^3 + x^2y + yz^2 + z^3 + C$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{1+t^2}, \frac{2}{1+t^4}, \frac{2}{(1+t^2)^2}\right)\Big|_{t=0} = (2,2,2) \qquad (-\text{''}-)\Big|_{t=1} = (1,1,\tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \tilde{F}\,dr = U(1,1,\tfrac12) - U(2,2,2) = \frac18 + 1 + \frac14 + \frac18 - 64 - 8 - 8 - 8$$

$$= -\frac{173}{2}$$

$$\int_\gamma G\,dr = \int_\gamma 0\,dx + 0\,dy + x\,dz = \left[x = \frac{2}{1+t^2} \quad dz = -\frac{8t}{(1+t^2)^3}\,dt\right]$$

$$= \int_0^1 -\frac{16t}{(1+t^2)^4}\,dt = \left[\frac{8}{3(t^2+1)^3}\right]_0^1 = -\frac{7}{3}$$

$$\int_\gamma F\,dr = \int_\gamma \tilde{F}\,dr + \int_\gamma G\,dr = -\frac{173}{2} - \frac{7}{3} = -\frac{533}{6}$$