Samuel Lundqvist
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
8 januari 2013

AoK - måsteuppgifter

1. Antag att det ligger 110 olika bollar märkta med siffrorna $1, 2, \ldots, 110$ i en urna (varje boll har en unik siffra).
   (a) Vilket är det minsta antal bollar man måste plocka upp ur urnan för att vara säker på att någon bolls tal är delbart med 10?
   (b) Hur många sätt kan man välja sju bollar från urnan så att alla valda bollars siffror är delbara med tio? (Ordningen mellan de utvalda bollarna spelar ingen roll.)
2. (a) Hur många injektiva funktioner f finns det från $\mathbb{N}_4$ till $\mathbb{N}_5$ så att $f(4) = 1$?
   (b) Hur många surjektiva funktioner f finns det från $\mathbb{N}_4$ till $\mathbb{N}_3$ så att $x \geq f(x)$?
3. En relation R definieras på $\{1, 4, 6\}$ genom aRb om $a + 2b$ är delbart med 3. Utred om R är reflexiv, symmetrisk och transitiv.
4. (a) Hur många element innehåller permutationsgruppen S_6?
   (b) Låt $\pi = (123)(45)(6)$ och låt $\tau = (1234)(56)$. Vilken ordning har π? Vilken ordning har τ? Bestäm $\tau \cdot \pi$ på cykelform. Bestäm slutligen π^{-1} på cykelform.
5. Faktoruppdela polynomet $x^4 + 2$ i irreducibla polynom i $\mathbb{Z}_3[x]$.
6. (a) Antag att vi har 10 vita och 10 svarta bollar (alla vita bollar är identiska och alla svarta bollar är identiska). Hur många olika följder av längd 10 kan vi bilda av dessa?
   (b) Antag att vi har 10 vita, 10 svarta och 10 gula bollar (alla vita, svarta och gula bollar är identiska). Hur många sätt finns det att välja ut 10 bollar om ordningen mellan de utvalda bollarna saknar betydelse?
7. Bestäm antalet ord om nio bokstäver som man kan bilda från bokstäverna $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ så att delorden ACD, DI och FGI inte förekommer i något ord. Varje bokstav får endast förekomma en gång per ord. T.ex. är $BADCEFGHI$ ett tillåtet ord, men $FGHIACDBE$ är det inte eftersom delordet ACD förekommer i detta ord.
8. En relation R definieras på $\mathbb{N}$ genom aRb om a och b de har samma bild under funktionen $f(x) = max(x, 13)$. Visa att R är en ekvivalensrelation genom att verifiera att R är reflexiv, symmetrisk och transitiv.
9. (a) Bestäm antalet element $\omega \in S_5$ som uppfyller $\omega = \omega^{-1}$.
   (b) Bestäm antalet $\omega \in S_5$ som uppfyller $\omega(1) \neq 1, \omega(2) \neq 2$ och $\omega(3) \neq 3$.
10. Faktoruppdela polynomet $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ i irreducibla polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$.

Lösningsförslag.

1. (a) De tal x som är delbara med 10 i det givna intervallet är $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70,$ 80,90, $100, 110$, varur det följer att det finns $110 - 11 = 99$ tal som inte är delbara med 10. Genom att dra 100 bollar ur urnan är man alltså säker på att något av talen är delbart med 10.

   (b) Enligt resonemanget ovan finns det alltså 11 tal som är delbara med 10. Antalet sätt att välja sju tal som är delbara med 10 utan hänsyn till ordning är alltså

$$\binom{11}{7} = \frac{11!}{7!4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330.$$

2. (a) Givet att $f(4) = 5$ så har vi 4 möjliga värden för $f(1)$. När vi besämt $f(1)$ har vi 3 möjliga värden för $f(2)$, när vi bestämt $f(2)$ har vi 2 val för $f(3)$. Enligt multiplikationsprincipen finns det alltså $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sådana funktioner.

   (b) Vi noterar först att om f är en funktion som uppfyller kraven i uppgiften så måste $f(1) = 1$, $f(2) \leq 2$, $f(3) \leq 3$ och $f(4) \leq 3$. Om vi inte bryr oss om kravet på surjektivitet finns det totalt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ funktioner av den här typen. Låt oss nu beräkna antalet sådana funktioner som *inte* är surjektioner. Om en funktion inte är en surjektion måste det finnas ett element i målmängden som inte träffas. Eftersom $f(1) = 1$ så träffas 1 alltid.

   Om 2 inte träffas så måste $f(2) = 1$, $f(3) = 1$ eller $f(3) = 3$ samt $f(4) = 1$ eller $f(4) = 3$. Det finns alltså $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ funktioner där 2 inte träffas.

   Om 3 inte träffas så är $f(2) = 1$ eller $f(2) = 2$, $f(3) = 1$ eller $f(3) = 2$, $f(4) = 1$ eller $f(4) = 2$. Det finns alltså $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ funktioner där 3 inte träffas.

   Slutligen har vi räknat de funktioner som varken träffar 2 eller 3 dubbelt. Det finns endast en sådan funktion och alltså är antalet surjektiva funktioner som uppfyller kraven i uppgiften är $18 - 4 - 8 + 1 = 7$ stycken.

3. Eftersom vi har en så liten mängd kan vi skriva upp alla a och b så att aRb. Vi börjar med att notera att aRa eftersom $a + 2 \cdot a = 3a$ som är delbart med 3 för alla naturliga tal a och alltså måste aRa gälla för alla a i $\{1, 4, 6\}$.

   Sedan har vi att $1R4$ eftersom $1 + 2 \cdot 4 = 9$, vilket är delbart med tre. Likaså är $4R1$ eftersom $4 + 1 \cdot 2 = 6$ är delbart med tre. Däremot är 1 och 6 ej relaterade, inte heller 6 och 1. Inte heller är 4 och 6 relaterade och slutligen inte heller 6 och 4.

   Vi har alltså

$$1R1, 4R4, 6R6, 1R4, 4R1. \tag{1}$$

   Reflextivitet: Enligt ovan gäller det att aRa för alla $a \in \{1, 4, 6\}$, alltså är R reflexiv.

   Symmetri: Symmetrin följer om vi kan visa att om a är relaterat till b så ska även b vara relaterat till a, dvs aRb ska medföra att bRa, vilket följer av (1).

   Relationen är alltså symmetrisk.

   Transitivitet: Vi ska visa att om a är relaterat till b och b är relaterat till c så är a relaterat till c. Vi gör återigen en systematisk genomgång och verifierar att för alla par på formen (aRb, bRc) så är även a relaterat till c, dvs aRc ska finnas med i (1).

   $1R1, 1R1 \implies 1R1.$

   $1R1, 1R4 \implies 1R4.$

   $4R4, 4R4 \implies 4R4.$

   $4R4, 4R1 \implies 4R1.$

   $1R4, 4R1 \implies 1R1.$

   $1R4, 4R4 \implies 1R4.$

   $4R1, 1R1 \implies 4R1.$

   $4R1, 1R4 \implies 4R4.$

$6R6, 6R6 \implies 6R6$.

Relationen är alltså transitiv.

4. (a) $|S_6| = 6! = 720$.

   (b) Permutationen π består av tre cykler av ordning $3, 2$ och 1. Ordningen av en permutation är den minsta gemensamma multipeln av de ingående cyklernas ordning och alltså är ordningen av π lika med 6. På samma sätt får man att ordningen av τ är lika med 4.

   Den sammansatta permutationen $\tau \cdot \pi$ beräknar vi genom att skriva upp permutationerna på tabellform.

	1	2	3	4	5	6
π	2	3	1	5	4	6
$\tau\pi$	3	4	2	6	1	5

   På cykelform ger detta (132465) (dvs en cykel av längd 6).

   Från de två översta raderna i tabellen ovan får vi att

	1	2	3	4	5	6
π^{-1}	3	1	2	5	4	6

   Inversen till π är alltså (132)(45)(6) på cykelform.

5. Låt $p(x) = x^4 + 2$. Vi ser att $p(1) = 0$ och alltså är (x+2) en faktor till $p(x)$. Divisionsalgoritmen ger att
$$x^4 + 2 = (x + 2)(x^3 + x^2 + x + 1).$$
Polynomet $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ har roten $x = 2$ och alltså är $(x + 1)$ en faktor till $q(x)$.

   Polynomdivision ger $q(x) = (x+1)(x^2+1)$. Men polynomet $s(x) = x^2+1$ saknar rot i $\mathbb{Z}_3$ och eftersom det är av grad två måste det vara irreducibelt. Det följer att vi kan skriva
$$x^4 + 2 = (x + 2)(x + 1)(x^2 + 1),$$
vilket ger den sökta uppdelningen i irreducibla faktorer.

6. (a) Följden består av tio bollar. Den första bollen kan väljas på två sätt, den andra kan väljas på två sätt, och så vidare. Enligt multiplikationsprincipen finns det alltså $2^{10} = 1024$ sådana följder.

   (b) Varje urval bestäms av antalet vita, svarta och gula bollar. Om vi har ett urval som består av precis v vita bollar, s svarta bollar och gÊgula bollar så kan vi skriva detta urval som en binär sträng genom tekniken med avskiljare. Urvalet skrivs alltså $\underbrace{0\cdots0}_{v \text{ stycken}}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{s \text{ stycken}}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{g \text{ stycken}}$, och i allmänhet ger varje sträng av den här typen med $v + s + g = 10$ ett urval. Vi söker alltså antalet sätt att placera ut två ettor på tolv positioner där ordningen saknar betydelse. Svaret på uppgiften är alltså $\binom{12}{2} = \frac{12!}{(12-2)!2!} = \frac{12\cdot11}{2} = 66$.

7. Låt X beteckna alla ord om nio bokstäver från de givna bokstäverna där ACD förekommer som delord. Låt på motsvarande sätt Y representera alla ord där DI förekommer som delord och låt slutligen Z representera alla ord där FGI förekommer som delord.

   Antalet ord av längd nio som vi kan bilda från nio skilda bokstäver är 9!, vilket följer av multiplikationsprincipen. Det sökte antalet ord är därför $9! - |X \cup Y \cup Z|$. Enligt sållprincipen så gäller det att
$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - (|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|) + |X \cap Y \cap Z|.$$
Genom att betrakta alfabetet som $\{ACD, B, E, F, G, H, I\}$ ser vi att det finns 7! ord där ACD förekommer som delord, så $|X| = 7!$. På motsvarande sätt får vi $Y = 8!$ och $Z = 7!$.

Mängden $X \cap Y$ består av alla ord där både ACD och DI förekommer som delord. Eftersom varje bokstav få förekomma högst en gång måste varje sådant ord vara på formen $ACDI$. Det följer att $|X \cap Y| = 6!$.

Mängden $X \cap Z$ består av alla ord där både ACD och FGI förekommer som delord. Genom att betrakta alfabetet som $\{ACD, FGI, B, E, H\}$ följer det att $|X \cap Z| = 5!$.

Mängden $Y \cap Z$ består av alla ord där både DI och FGI förekommer som delord. Men eftersom varje bokstav får förekomma högst en gång så finns det inga ord av den här typen. Alltså är $|Y \cap Z| = 0$. Man får dessutom att $|X \cap Y \cap Z| = 0$.

Detta ger oss

$$|X \cup Y \cup Z| = 7! + 8! + 7! - (6! + 5! + 0) + 0 = 2 \cdot 7! + 8! - 6! - 5!$$

och antalet ord är därför

$$9! - (2 \cdot 7! + 8! - 6! - 5!) = 313320.$$

8. Reflextivitet: xRx gäller trivialt eftersom $f(x)$ har samma bild som $f(x)$.

   Symmetri: Antag att xRy gäller. Då är $f(x) = f(y)$. Alltså måste även yRx gälla. Relationen är således symmetrisk.

   Transitivitet: Antag att xRy och yRz gäller. Då är $f(x) = f(y)$ samt $f(x) = f(z)$. Alltså måste även $f(x) = f(z)$, dvs xRz gälla. Relationen är således transitiv.

9. (a) Likheten $\omega = \omega^{-1}$ är ekvivalent med likheten $\omega \cdot \omega = \omega \cdot \omega^{-1}$, dvs likheten $\omega^2 = 1$ med multiplikativ notation. De element som uppfyller denna likhet har antingen ordning ett eller ordning två. Det finns bara ett element av ordning ett, nämligen identiteten. Ett element av ordning två är antingen på formen (**)(*)(*)(*) eller på formen (**)(**)(*) på cykelnotation.

   Antalet element på formen (**)(*)(*)(*) är lika med antalet sätt att oordnat välja ut elementen i tvåcykeln, dvs $\binom{5}{2} = 10$.. Anledningen till det är att ordningen mellan elementen i tvåcykeln inte spelar någon roll (men det skulle var annorlunda i en trecykel, där är t.ex. (123) och (132) olika permutationer). Dessutom spelar ordningen mellan de olika ett-cyklerna ingen roll, t.ex. är (24)(1)(3)(5) densamma som (24)(3)(1)(5).

   För att bestämma antalet element på formen (**)(**)(*) börjar vi med ettcykeln. Det finns 5 sätt att välja ut ettcykeln. För varje sådant val ska vi sedan välja ut elementen i den första tvåcykeln. Det kan ske på $\binom{4}{2}$ sätt, eftersom vi nu bara har 4 element att välja från. De kvarvarande två elementen placerar vi i den andra tvåcykeln. Men vi måste också ta hänsyn till att tvåcyklerna kan byta plats. T.ex. är ju (25)(13)(4) = (13)(25)(4). Det totala antalet element på formen (**)(**)(*) är alltså $5 \cdot \frac{\binom{4}{2}}{2} = 15$.

   Sammantaget finns det alltså $1 + 10 + 15 = 26$ element i S_5 som uppfyller ekvationen.

   (b) För att förstå resonemanget i lösningen behöver man komma ihåg att alla element i S_n är bijektiva funktioner.

   Låt X_i vara mängden av element ω i S_5 så att $\omega(i) = i$ för $i = 1, 2, 3$. Alla element som inte ligger i unionen av X_1, X_2 och X_3 kommer att vara på den sökta formen.

   Det sökta antalet element är därför $|S_5| - |X_1 \cup X_2 \cup X_3|$.

   Vi har $|X_1| = 4!$ eftersom vi har fyra val för att bestämma $\omega(2)$ på, tre val för att bestämma $\omega(3)$, osv. På motsvarande sätt är $|X_2| = |X_3| = 4!$.

   Vi har $X_1 \cap X_2 = 3!$ eftersom vi har tre val för att bestämma $\omega(3)$, två val för att bestämma $\omega(2)$, osv. På motsvarande sätt är $|X_1 \cap X_3| = |X_2 \cap X_3| = 3!$.

   Slutligen har vi $|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 2!$ eftersom vi har två val att bestämma $\omega(4)$ och ett val att bestämma $\omega(5)$.

   Sållprincipen ger oss att

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| - (|X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + |X_2 \cap X_3|) + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|$$

$$= 3 \cdot 4! - 3 \cdot 3! + 2 = 72 - 18 + 2 = 56.$$

Antalet element av den sökta typen är alltså $5! - 56 = 120 - 56 = 64$.

10. Genom insättning finner man att $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0, f(2) \neq 0, f(3) \neq 0, f(4) \neq 0$, så enligt faktorsatsen finns det ingen linjär faktor till $f(x)$.

Vi har alltså två möjligheter. Antingen kan $f(x)$ skrivas som en produkt av två andragradspolynom $g(x)$ och $h(x)$, eller så är $f(x)$ irreducibelt.

Antag alltså att $f(x) = g(x)h(x)$, där $g(x)$ och $h(x)$ har grad 2. Eftersom $f(x)$ är moniskt så innebär en faktorisering $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ att både $g(x)$ och $h(x)$ måste vara moniska. Anledningen till det, som inte nämns i Biggs är följande: Klart är att produkten av högstakoefficienterna för $g(x)$ och $h(x)$, som vi kallar G och H måste vara ett. Om vi multiplicerar likheten $f(x) = g(x)h(x)$ med GH på båda sidorna får vi $f(x) = Hg(x) \cdot Gh(x)$. Men polynomen $Hg(x)$ och $Gh(x)$ är moniska av konstruktion. Alltså kan vi anta att $g(x)$ och $h(x)$ är moniska.

Vi kan alltså skriva $g(x) = x^2 + Ax + B$ och $h(x) = x^2 + Cx + D$.

Vi får då $g(x) \cdot h(x) = x^4 + (A + C)x^3 + (B + D + AC)x^2 + (AD + BC)x + BD$.

Detta ger oss ett ekvationssystem bestående av fyra ekvationer:

$$\begin{aligned} A + C &= 2 \\ B + D + AC &= 4 \\ AD + BC &= 3 \\ BD &= 2 \end{aligned}$$

Antag att $B = 0$. Då motsägs den sista ekvationen. Alltså är $B \neq 0$.

Antag istället att $B = 1$. Enligt den sista ekvationen måste $D = 2$. Den andra ekvationen blir då $3 + AC = 4$, eller $AC = 1$. Antag att $A = 1$. Då är $C = 1$ enligt samma ekvation. Denna tilldelning gör att även den första och den tredje ekvationen satisfieras. Alltså är $B = 1, D = 2, A = 1, C = 1$ en lösning till systemet. Detta ger oss den irreducibla uppdelningen

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2).$$

Anmärkning 1: Om man fortsätter att lösa ekvationssystemet så kommer man även att finna lösningen $B = 2, A = 1, D = 1, C = 1$ som svarar mot samma faktorisering men i omvänd ordning. Några fler lösningar finns inte eftersom uppdelning i irreducibla faktorer är unik bortsett från ordningen mellan faktorerna (och konstanter framför polynomen).

Anmärkning 2: Vi vet att både x^2+x+1 och x^2+x+2 är irreducibla. Att någon, t.ex. $s(x) = x^2+x+1$, inte skulle vara irreducibel skulle innebära att $s(a) = 0$ för något $a \in \mathbb{Z}_5$. Men då skulle även $f(a) = 0$, vilket motsäger vad vi noterade inledningsvis.