MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Lösningar till tentan
Matematik för Naturvetare 1,
6 hp
5 augusti 2024

1 Funktionerna i nämnaren och i täljaren är kontinuerliga i $x = 0$. Man provar med att stoppa in värdena:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + \sqrt{x^3+2}}{x^2 - x + 1} = \frac{0 + \sqrt{0+2}}{0 - 0 + 1} = \sqrt{2}.$$

Vi byter variabeln $x \to \infty$ till $y = 1/x \to 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+3/x)}{\sin 1/x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+3y)}{\sin y} = 3 \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+3y)}{3y} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 3.$$

2 Vi beräknar determinanten;

$$\det \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 2a & 1 \end{pmatrix} = a^2 - 5a + 4 = (a-1)(a-4).$$

För alla $a \neq 1, 4$ har systemet en lösning.

För $a = 1$ får vi:

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \end{cases}$$

Man får motsägelse mellan den första and den sista ekvationerna. Systemet saknar lösningar.

För $a = 4$ blir det:

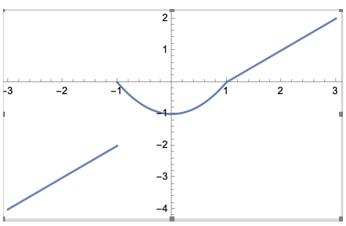
$$\begin{cases} 4x + 4y + z &= 1 \\ 2x + 4y + 2z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \end{cases}.$$

Det är motsägelse mellan sista två ekvationerna. Systemet saknar lösningar.

3 Vi börjar med att ritta grafer till funktionerna:

$$g_1(x) = x^2 - 1, \quad g_2(x) = x - 1.$$

Den första funktionen är lika med 0 då $x = -1, 1$ och har minimum i punkten $g_1'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Parabeln är vänd uppåt.



Grafen till funktionen g_2 är en rätt linje.

Parabeln och linjen möts i punkten $(x, y) = (1, 0)$, dvs funktionen är kontinuerlig i en omgivning av $x = 1$. Däremot, antar funktionerna olika värden i $x = -1$. Slutsatsen: funktionen är inte kontinuerlig.

Värdemängden för funktionen är: $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$.

4 a) Vi sätter in $z = a + ib$ som ger

$$-3(a+ib) + 2(a-ib) = 5i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3a+2a & = & 0 \\ -3b-2b & = & 5 \end{array} \right. \Rightarrow a = 0, b = -1.$$

Lösningen blir$z = -i$.

b) Vi använder pq-formeln:

$$z_{1,2} = \frac{1+3i \pm \sqrt{(1+3i)^2 + 32 + 4i}}{2} = \frac{1+3i \pm \sqrt{24+10i}}{2}.$$

För att beräkna $\sqrt{24+10}$ sätter vi

$$\sqrt{24+10} = x + iy \Rightarrow 24 + 10i = x^2 + 2ixy - y^2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 24, xy = 5.$$

En lösning är: $5 + i$.

$$z_{1,2} = \frac{1+3i \pm (5+i)}{2}.$$

De tvålösningarna är $z_1 = 3 + 2i$ och $z_2 = -2 + i$.

5 Först ska vi leta efter lösningen till den homogena ekvationen:

$$y'' - 9y' + 18y = 0.$$

Substitutionen $y = e^{rx}$ ger

$$r^2 - 9r + 18 = 0 \Rightarrow r = 6, 3.$$

Lösningen till den homogena ekvationen är:

$$y_{\text{hom}} = Ae^{6x} + Be^{3x}.$$

Vi letar efter den partikulära lösningen på formen $y_{\text{part}} = ax^2 + bx + c$. Substitutionen i ekvationen ger:

$$2a - 9\Big(2ax + b\Big) + 18\Big(ax^2 + bx + c\Big) = 18x^2 + 36x$$

$$\Rightarrow a = 1, \quad b = 3, \quad c = \frac{25}{18}.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen blir:

$$y = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}} = Ae^{6x} + Be^{3x} + x^2 + 3x + \frac{25}{18}.$$

För att hitta lösningen som uppfyller begynnelsevillkor beräknar vi derivaten:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} y(0) & = & A + B + \frac{25}{18} & = & \frac{25}{18} \\ y'(0) & = & 6A + 3B + 3 & = & 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} A + B & = & 0 \\ 6A + 3B & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow A = B = 0.$$

Lösningen till diff. ekvationen blir

$$y = x^2 + 3x + \frac{25}{18}.$$

6 Mitpunkten på en triangel ges av medelvärdet av hörnvektorerna:

$$\vec{AE} = \frac{1}{3}\left(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}\right).$$