

Senast uppdaterad: 13 oktober 2025

13. Singulärvärdesuppdelning

I det här kapitlet ska vi titta på generella linjära avbildningar $L: V \rightarrow W$ mellan inre produktrum och se hur vi kan välja baser för V respektive W för att få en så enkel beskrivning som möjligt av L .

Sats 13.1 (Singulärvärdesuppdelning). *Låt $L: V \rightarrow W$ vara en linjär avbildning mellan ändligt-dimensionella inre produktrum över $k = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Då finns det ortonormala baser $\{v_1, \dots, v_n\}$ för V och $\{w_1, \dots, w_m\}$ för W samt positiva reella tal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ (där $r = \text{rk}(L)$) så att*

$$L(v_i) = \begin{cases} \sigma_i w_i & \text{om } 1 \leq i \leq r, \\ 0 & \text{om } r < i \leq n. \end{cases} \quad (13.1)$$

*Å andra sidan, om (13.1) gäller så är $v_1, \dots, v_n$ egenvektorer till L^*L med tillhörande egenvärden $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, 0, \dots, 0$. Alltså är $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ unikt bestämda.*

Bevis. Notera att L^*L är självadjungerad och att $\langle L^*L(v), v \rangle = \langle L(v), L(v) \rangle \geq 0$ för alla $v \in V$. Detta innebär att L^*L har icke-negativa reella egenvärden. Av Sats 11.4 finns en ortonormal bas $\{v_1, \dots, v_n\}$ för V bestående av egenvektorer till L^*L . Vi kan rangordna de positiva egenvärdena $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ och sätta $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ för $i = 1, \dots, r$. Välj nu $\{w_1, \dots, w_r\}$ genom

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i} L(v_i).$$

Då är $w_1, \dots, w_r$ ortonormala, eftersom $\|w_i\| = 1$ och $\langle w_i, w_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle L(v_i), L(v_j) \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle L^*L(v_i), v_j \rangle = \frac{\lambda_i}{\sigma_i \sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ och vi kan komplettera med $m-r$ stycken vektorer för att få en ortonormal bas $\{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$ för W . För $i > r$ har vi att $L(v_i) = 0$ eftersom v_i är en egenvektor till L^*L med egenvärde 0. Detta visar existensen av baser som uppfyller (13.1). $\square$

Exempel 13.1. Om A är en $m \times n$ -matris kan vi med hjälp av Sats 13.1 skriva A som $A = U_2 \Sigma U_1^*$, där U_1 är en unitär (ortogonal om $k = \mathbb{R}$) $n \times n$ -matris, U_2 är en unitär $m \times m$ -matris och Σ är en $m \times n$ -matris som har $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ på diagonalen

och nollor överallt annars. Detta kallas för en *singulärvärdesuppdelning* av A . Notera att U_1 och U_2 ej är unikt bestämda. Om vi väljer att ordna singulärvärdena i fallande ordning så är dock Σ unikt bestämd.

Definition 13.1. De icke-negativa talen $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ i Sats 13.1 kallas för (positiva) *singulärvärden* till L . Om r är mindre än både m och n så utvidgar vi singulärvärdena till att inkludera $\sigma_{r+1} = 0, \dots, \sigma_{\min(m,n)} = 0$. Dvs. singulärvärdena till L är de icke-negativa talen $\sigma_1, \dots, \sigma_{\min(m,n)}$, där exakt $\min(m,n) - \text{rk } L$ stycken är noll. En faktorisering av en matris A som i Exempel 13.1 kallas för en *singulärvärdesuppdelning* av A .

Exempel 13.2. Låt oss hitta en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med att beräkna A^*A :

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eigenvärdena till denna matris är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 1$ med tillhörande egenvektorer

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi normaliserar dessa och får en ortonormal bas för $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Singulärvärdena är $\sigma_1 = \sqrt{3}$ och $\sigma_2 = 1$. Vi sätter nu

$$w_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kompletterar med $w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ för att få en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$. Vi får då

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det är lätt att kontrollera att $A = U\Sigma V^*$.

Diskussionsfrågor

- (1) Vad är singularvärdena till den linjära avbildningen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som skickar z till iz om vi tar $\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \overline{z_2}$ som inre produkt på $\mathbb{C}$ som vektorrum över $\mathbb{C}$?
- (2) Vad är singularvärdena för samma avbildning om vi istället ser $\mathbb{C}$ som vektorrum över $\mathbb{R}$ med inre produkten $\langle a + ib, c + id \rangle = ac + bd$?

Övning

Visa att en linjär operator $L: V \rightarrow V$ är en isometri ($\|L(v)\| = \|v\|$ för alla $v \in V$) om och endast om alla dess singularvärden är lika med 1.

Exempel 13.3. Betrakta den linjära avbildningen $L: \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som ges av $f(x) \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Vi har inre produkter som på båda rummen definieras av

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Låt oss nu bestämma singularvärdena till L med avseende på dessa inre produkter. Med hjälp av Gram-Schmidts metod hittar vi en ortonormal bas för $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$:

$$\beta = \{v_1 = 1, \quad v_2 = \sqrt{3}(2x - 1)\}.$$

Låt ε vara standardbasen för $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, dvs. $\varepsilon = \{1, x, x^2\}$. Projektionsformeln och identiteten $\langle L(v_i), e_j \rangle = \langle v_i, L^*(e_j) \rangle$ ger då att

$$[L^*]_{\varepsilon}^{\beta} = \begin{pmatrix} \langle L(v_1), 1 \rangle & \langle L(v_1), x \rangle & \langle L(v_1), x^2 \rangle \\ \langle L(v_2), 1 \rangle & \langle L(v_2), x \rangle & \langle L(v_2), x^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{20} \end{pmatrix}.$$

Det betyder att

$$\begin{aligned} [L^*L]_\beta &= [L^*]_\varepsilon^\beta [L]_\beta^\varepsilon \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{12} \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denna matris har egenvärden $\frac{13 \pm 2\sqrt{31}}{60}$ och singularvärdena är kvadratrötterna till dessa:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{13 + 2\sqrt{31}}{60}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{13 - 2\sqrt{31}}{60}}.$$

Notera här att $13 - 2\sqrt{31} > 0$ eftersom $31 < 36 = 6^2$ och $13 - 2\sqrt{36} = 1$. Alltså är båda värdena positiva, vilket stämmer med satsen om singularvärden.

Referenser

- [FIS03] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence, *Linear algebra.*, 4th. ed. (international) ed., Pearson, 2003 (English).