STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik

Diagnostiskt prov – Lösningar
Vektorgeometri och funktionslära
VT 2013

Lösning till uppgift 1 (Komplexa tal)

Vi börjar med första och andra uträkningen.

$$\begin{aligned}
&2 \cdot z = 2 \cdot (1+3i) = 2+6i,\\
&z+w = (1+3i)+(1+i) = 1+1+3i+i = 2+4i.
\end{aligned}$$

För den tredje uträkningen behöver vi använda att $i^2 = -1$.

$$z \cdot w = (1+3i)(1+i) = 1+3i+i+3i^2 = 1+4i-3 = -2+4i.$$

Ett enkelt sätt att beräkna kvoten av två komplexa tal är att förlänga med nämnarens s.k. konjugat och sedan använda sig av konjugatregeln. Konjugatet till ett komplext tal $a+bi$ är $a-bi$, alltså är $1-i$ konjugatet till $1+i$.

$$\frac{z}{w} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+3i-i-3i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+3}{1+1} = \frac{4+2i}{2} = 2+i.$$

Lösning till uppgift 2 (Funktioner)

Vi sätter in $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$ och $f(3) = \frac{1}{1+3}$.

$$\frac{f(\frac{1}{3})}{f(3)} = \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{1+3}} = \frac{\frac{1}{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = 3.$$

Lösning till uppgift 3 (Algebraiska uttryck)

Vi använder oss av kvadreringsregeln.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2} &= \sqrt{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)} =\\
&= \sqrt{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2} =\\
&= \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

Lösning till uppgift 4 (Potenser och rötter)

Vi börjar med att sätta in $x = \sqrt[4]{7}\,\sqrt[12]{7}$. Sedan använder vi potenslagarna för att dela upp uttrycket i två delar som är lättare att hantera.

$$x^6 = (\sqrt[4]{7}\,\sqrt[12]{7})^6 = (\sqrt[4]{7})^6 \cdot (\sqrt[12]{7})^6.$$

För att förenkla dessa uttryck använder vi oss av rotens definition. Fjärde roten ur 7 är det positiva reella talet vars fjärde potens är 7. Alltså är $(\sqrt[4]{7})^4 = 7$ och

$$(\sqrt[4]{7})^6 = (\sqrt[4]{7})^4 \cdot (\sqrt[4]{7})^2 = 7 \cdot (\sqrt[4]{7})^2.$$

Vi tittar närmare på $(\sqrt[4]{7})^2$. Om vi kvadrerar detta så får vi $((\sqrt[4]{7})^2)^2 = (\sqrt[4]{7})^4 = 7$. Dessutom är $(\sqrt[4]{7})^2$ positiv eftersom det är en produkt av två positiva tal. Men då måste $(\sqrt[4]{7})^2$ vara lika med $\sqrt{2}$, eftersom roten ur två är definierad som det positiva reella talet vars kvadrat är 7. Vi får alltså

$$(\sqrt[4]{7})^6 = 7 \cdot (\sqrt[4]{7})^2 = 7 \cdot \sqrt{7}.$$

Vi använder samma knep på $(\sqrt[12]{7})^6$. Dess kvadrat är $((\sqrt[12]{7})^6)^2 = (\sqrt[12]{7})^{12} = 7$ och $(\sqrt[12]{7})^6$ är positiv, alltså måste $(\sqrt[12]{7})^6$ också vara $\sqrt{7}$. Vi sätter in i uttrycket för x^6 och får

$$x^6 = (\sqrt[4]{7})^6 \cdot (\sqrt[12]{7})^6 = (7 \cdot \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} = 7 \cdot 7 = 49.$$

Lösning till uppgift 5 (Absolutbelopp)

Först sätter vi in $x = 5$.

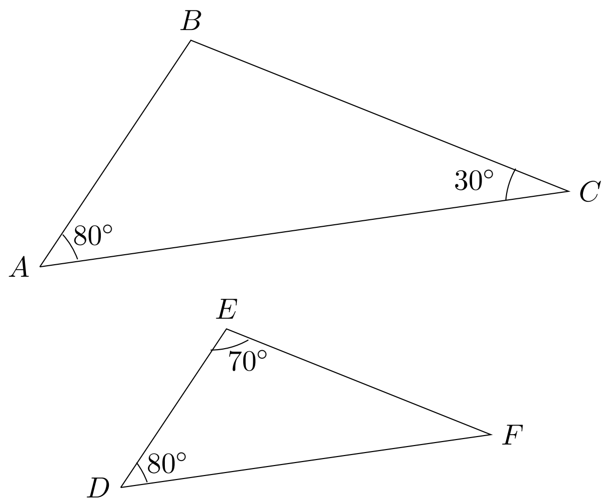
$$|3 - (4 - x)| = |3 - (4 - 5)| = |3 - (-1)| = |4| = 4.$$

Nu sätter vi in $x = -2$.

$$|3 - (4 - x)| = |3 - (4 - (-2))| = |3 - 6| = |-3| = 3.$$

Lösning till uppgift 6 (Vinklar och sidor)

Vi börjar med att skissera trianglarna.



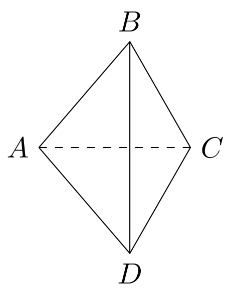
Eftersom vinkelsumman i trianglar är 180° så är

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ.$$

På samma sätt beräknar vi att $\angle F = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$. Eftersom vinklarna i trianglarna ABC och DEF är lika är trianglarna likformiga. Därför är förhållandet mellan längden av motsvarande sträckor lika. Alltså är $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$.

Lösning till uppgift 7 (Figurer i tre dimensioner)

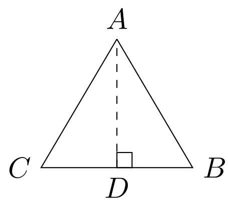
En tetraeder är en tredimensionell figur bestående av fyra trianglar. Vi börjar med att skissera den, t.ex. på följande sätt.



Eftersom tetraedern är regelbunden är alla sidor liksidiga trianglar och alla kanter lika långa. Därför har sträckan CD samma längd som sträckan AB, alltså längd 3.

Lösning till uppgift 8 (Höjd och area)

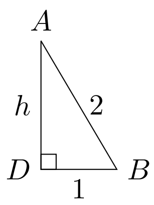
För att underlätta förklaringen inför vi beteckningar för de olika punkterna i triangeln, enligt följande skiss.



I skissen ser det ut som att sträckorna CD och DB är lika långa. Men eftersom det bara är en skiss behöver vi visa på ett rigoröst sätt att sträckorna faktiskt är lika långa. Det kan vi göra genom att visa att trianglarna ACD och ABD är kongruenta. Det följer då att sidorna CD och DB är lika långa.

Att trianglerna ACD och ABD är kongruenta kan man visa t.ex. med regeln vinkel-sida-vinkel. Vinklarna i D är rätvinkliga och därmed lika. Vinkeln $\angle C$ i ACD är lika med vinkeln $\angle B$ i ABD eftersom de är vinklar i den liksidiga triangeln ABC. Alltså är även vinklarna i A lika i de båda trianglarna. Dessutom har trianglerna en gemensam sida, AD, som därmed har samma längd i båda triangler.

Eftersom sidan BC har längd 2 och sträckorna CD och DB har alltså CD och DB längd 1. Vi skissar den rätvinkliga triangeln ABD.



Enligt Pythagoras sats gäller det att

$$h^2 + 1^2 = 2^2.$$

Vi löser ekvationen för h och får att $h = \sqrt{3}$ eller $h = -\sqrt{3}$. Eftersom h är en längd måste den vara positiv, alltså är höjden $h = \sqrt{3}$.

För att beräkna arean av triangeln ABC använder vi oss av formeln

$$\text{area av triangel} = \frac{1}{2} \cdot \text{höjd} \cdot \text{längden av motsvarande sida.}$$

Alltså har den liksidiga triangeln ABC arean $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3}$.

Lösning till uppgift 9 (Ekvationssystem)

Vi sätter in den första ekvationen i den andra och får

$$\frac{x+1}{6} = \frac{-3x+5-8}{3}.$$

Båda sidor av ekvationen skrivs om,

$$\frac{x}{6} + \frac{1}{6} = -x - 1.$$

Alltså är

$$\frac{x}{6} + x = -\frac{1}{6} - 1,$$

och därmed

$$\frac{7x}{6} = -\frac{7}{6}.$$

Det följer att $x = -1$. Vi sätter in $x = -1$ i den första ekvationen och får

$$y = -3x + 5 = -3 \cdot (-1) + 5 = 8.$$

Vi testar lösningen genom att sätta in i ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 8 = -3 \cdot (-1) + 5 \quad \text{OK} \\ \frac{-1+1}{6} = \frac{8-8}{3} \quad \text{OK} \end{cases}$$

Lösning till uppgift 10 (Polynom)

a) Nyckeln till kvadratkompletteringen är kvadreringsregeln.

$x^2-6x+8 = x^2-2\cdot 3x+8 = x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+8 = (x-3)^2-9+8 = (x-3)^2-1.$

Nu löser vi ekvationen $x^2-6x+8 = 0$ som vi med hjälp av kvadratkompletteringen skriver om som

$$(x-3)^2 - 1 = 0.$$

Vi adderar 1 till båda sidor och får

$$(x-3)^2 = 1.$$

Alltså är $x - 3 = \sqrt{1} = 1$ eller $x - 3 = -\sqrt{1} = -1$. Det följer att $x = 4$ eller $x = 2$.

b) Vi substituerar $z^2 = t$ och får ekvationen $t^2 - 6t + 8 = 0$. Denna ekvation har vi redan löst i del a) fast för variablen x istället för t. Vi vet alltså redan att $t = 4$ eller $t = 2$. Det följer att $z^2 = 4$ eller $z^2 = 2$, och därmed att $z = 2$, $z = -2$, $z = \sqrt{2}$ eller $z = -\sqrt{2}$.

c) Allmänt gäller att en lösning $x = a$ till en polynomekvation $p(x) = 0$ ger en faktor $x - a$ av polynomet $p(x)$. (Detta samband är en del av faktorsatsen.) Med hjälp av del a) får vi att polynomet $x^2 - 6x + 8$ har faktorerna $x - 4$ och $x - 2$, alltså $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$. (Testa!)

d) Vi substituerar $x = s + 3$ och $y = t + 1$ och får $t + 1 = (s + 3)^2 - 6(s + 3) + 8$, alltså

$$t + 1 = s^2 + 6s + 9 - 6s - 18 + 8 = s^2 + 1,$$

och därmed $t = s^2$. Grafen är följande parabel.