Matematiska institutionen
Stockholms universitet
C.G.

Matematik med didaktisk inriktning I
Vektorgeometri och funktionslära
Repetitionsblad 1

I detta första repetitionsblad skall vi tala om *trigonometri* och grundläggande *vektorgeometri*. Vi repeterar teorin, men huvuddelen av arbetet gör du. Varje delavsnitt avslutas med två övningar. Övning A är en direkt tillämpning av teorin och bör inte innehålla några andra svårigheter. Övning B är också en direkt tillämpning av teorin, men är tänkt att vara något svårare. En god idé kan nog vara att första gången endast arbeta med A-övningarna för att sedan gå igenom repetitionsbladet igen (svara på frågor och rita), men denna andra gång välja B-övningarna.

Trigonometri.

För det första måste vi ha de grundläggande begreppen klara för oss. Vad menas egentligen med cosinus? Låt oss börja med att inskränka oss till vinklar mellan $0°$ och $90°$. Det är sådana vinklar som kan förekomma i rätvinkliga trianglar.

Rita nu en rätvinklig triangel och definiera sinus, cosinus och tangens för en vinkel. Inför själv lämpliga beteckningar.

Hur framgår det av figuren att $\sin(90-u) = \cos u$? Fler liknande samband utläser du direkt ur figuren. Skriv ned några sådana samband. Figuren är alltså en utmärkt *formelsamling*.

Pythagoras sats känner du ju till. Ur denna sats följer direkt ett samband mellan sinus och cosinus. Förklara detta.

Värdena av sinus, cosinus och tangens för några "vanliga vinklar" kanske du har lärt dig utantill. Det är egentligen onödigt, ty du konstruerar lätt en formelsamling genom att rita några trianglar. Gör så! Utläs ur din formelsamling sinus, cosinus och tangens för ett antal vanliga vinklar.

Vi har generaliserat de trigonometriska funktionerna så att de får värden även för vinklar större än $90°$, ja t.o.m. större än $360°$ eller negativa! Med hjälp av enhetscirkeln kan du definiera $\sin u$ och $\cos u$ då t.ex. $180 < u < 270$. Rita nu enhetscirkeln och förklara.

Med enhetscirkeln som formelsamling kan du utläsa fler trigonometriska samband. Förenkla t.ex. $\sin(90+u)$, $\cos(-u)$, $\cos(u+270)$ och beräkna $\sin 150°$, $\cos 225°$.

Övning A. Förenkla $(1+\tan^2 u)\cos^2 u$

Övning B. Förenkla $\tan u \cdot \tan(u-90)$

Grundläggande vektoralgebra

Du kan börja med att resonera lite med en kamrat om vektorbegreppet. Vad är det för skillnad mellan en *vektor* och en *riktad sträcka* ("pil")?

Det som gör vektorer så användbara i geometri är att vi kan räkna med dem. Rita en vektor $\mathbf{u}$, några cm lång, i övre högra hörnet av ditt papper och en vektor $\mathbf{v}$, med annan längd och riktning, i nedre vänstra hörnet av samma papper. Illustrera nu vektorerna $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$ och $3\mathbf{u}-2\mathbf{v}$.

Vektorer definieras ofta genom par av punkter. Hur kan det hända att $\overline{AB} = \overline{CD}$ även om $A \neq C$ och $B \neq D$?

Kursen handlar mycket om översättningar mellan tre olika språk: "*geometriska*", "*vektorgeometriska*" och "*algebraiska*".

Låt oss tala geometriska och säga att punkterna A, B och C ligger i rät linje. Översätt detta till de två andra språken! Behärskar du detta så har du uppfattat något av det väsentligaste i hela kursen.

Möjligheter till effektiva översättningar ges ofta om man har utsett en fast punkt O – kallad origo. Genom O kan till varje punkt associeras en ortsvektor. Berätta om detta och förklara hur ortsvektorn till en mittpunkt M på en sträcka AB förhåller sig till ortsvektorerna till A resp. B.

Övning A. Låt $ABCD$ vara en parallellogram och låt $\mathbf{u} = \overline{AC} + 2\overline{BD}$. Uttryck $\mathbf{u}$ i vektorerna $\overline{AB}$ och $\overline{AD}$.

Övning B. Låt ABC vara en triangel. Låt M vara mittpunkten på AB och N mittpunkten på CM. Låt P vara den punkt på AC som uppfyller $\overline{AP} = 2\overline{PC}$. Visa att punkterna B, N, P ligger i rät linje.

Koordinater

Man kan ha väldigt mycket skoj med vanlig vektoralgebra som ovan. Ibland (ja ofta) kan det vara effektivt att gå ytterligare ett steg i notation och införa *koordinater*. Man kanske kan säga att beräkningarna då blir mer aritmetiska än algebraiska. Å andra sidan blir beteckningarna tyngre. I rummet behöver vi ju t.ex. tre koordinater för att ange en vektor. Det är ofta en delikat avvägning att hitta en beteckning som är lagom detaljerad.

Rita ett vanligt koordinatsystem – ett ON-system – i övre delen av ditt papper och markera där punkten (3,5). Låt sedan vektorn $\mathbf{u} = (3,5)$. Rita $\mathbf{u}$ på två olika ställen i nedre delen av samma papper.

Låt $\mathbf{u} = (a,b)$ och $\mathbf{v} = (c,d)$. Förklara varför det inte på något vis är självklart att $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (a+c, b+d)$. Förklara sedan med hjälp av en figur varför det ändå är så att $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (a+c, b+d)$.

Övning A. Visa hur Pythagoras sats kan användas till att beräkna längden av vektorn (2,2,1) resp. avståndet mellan de två punkterna (3,7) och $(-2,5)$.

Övning B. Avgör om punkterna $(14,19,-12)$, $(25,7,1)$ och $(47,-19,29)$ ligger i rät linje eller inte. Det är absolut förbjudet att referera till räta linjens ekvation. Problemet bör lösas helt utan "bokstavsräkning".