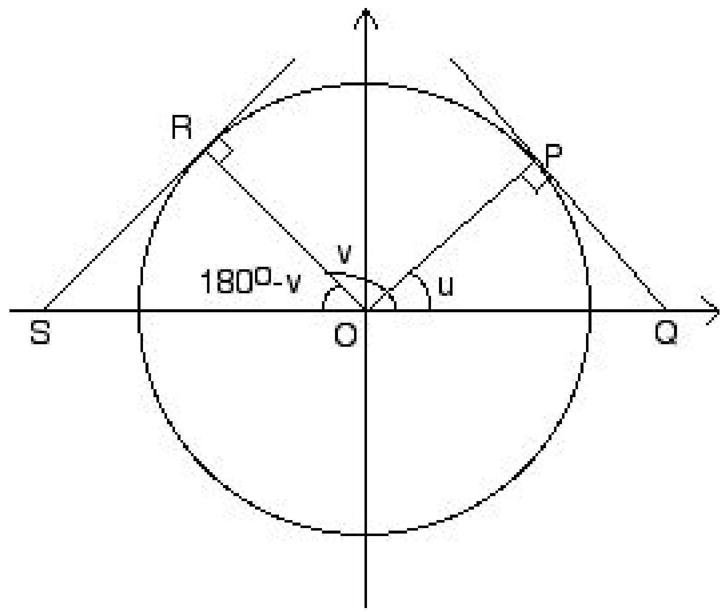
Lösningar till några övningar i Kap 1 i Vektorgeometri

17. I figuren är u en spetsig vinkel som vi har markerat i enhetscirkeln.



Linjen PQ tangerar cirkeln i P och enligt en sats i geometrin är OP vinkelrät mot PQ. I $\triangle OQP$ är därför

$$\tan u = \frac{|PQ|}{|OP|}.$$

Men OP är radie i cirkeln, så $|OP| = 1$ och vi får $\tan u = |PQ|$.

Vinkeln v i figuren är trubbig och som förut får vi nu

$$\tan(180° - v) = |RS|.$$

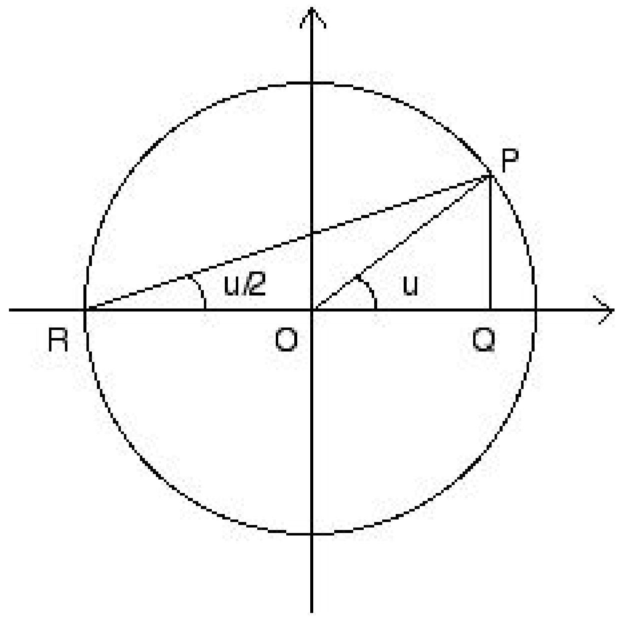
Men

$$\tan(180° - v) = \frac{\sin(180° - v)}{\cos(180° - v)} = \frac{\sin v}{-\cos v} = -\frac{\sin v}{\cos v} = -\tan v,$$

varför

$$\tan v = -|RS|.$$

18. Figuren nedan föreställer enhetscirkeln.



Att vinkeln $\wedge PRQ$ är halva $\wedge POQ$ följer av satsen att randvinkeln är hälften av medelpunktsvinkeln. Enligt cosinussatsen är

$$|PR|^2 = |OR|^2 + |OP|^2 - 2 \cdot |OR| \cdot |OP| \cdot \cos(180^\circ - u).$$

Men $|OR| = |OP| = 1$ eftersom de är radier i cirkeln och $\cos(180^\circ - u) = -\cos u$, så

$$|PR|^2 = 2 + 2\cos u = 2(1 + \cos u).$$

Vi får nu

$$\cos^2 \frac{u}{2} = \left(\frac{|QR|}{|PR|}\right)^2 = \frac{|QR|^2}{|PR|^2} = \frac{(1+\cos u)^2}{2(1+\cos u)} = \frac{1+\cos u}{2}$$

eftersom $|QR| = |OQ| + |OR| = \cos u + 1$. Vidare får vi

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{u}{2} &= \left(\frac{|PQ|}{|PR|}\right)^2 = \frac{|PQ|^2}{|PR|^2} = \frac{\sin^2 u}{2(1+\cos u)} = \frac{1-\cos^2 u}{2(1+\cos u)} \\ &= \frac{(1+\cos u)(1-\cos u)}{2(1+\cos u)} = \frac{1-\cos u}{2}. \end{aligned}$$

Här har vi använt den trigonometriska ettan $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ och konjugatregeln.

19. Formlerna i Övning 18 ger

$$\begin{aligned} \cos^2 15^\circ &= \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1}{8} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}, \end{aligned}$$

varav

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

På samma sätt får vi

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8},$$

så

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Observera att både sinus och cosinus av 15 grader är positiva.

Lösningar till övningarna i kapitel 2 i Vektorgeometri

1. Se papperen om räkning med vektorer.

2. Man kan resonera på flera olika sätt. Här är två förslag:

$$\overline{CA} = -\overline{AC} = -(\overline{AF} + \overline{FC}) = -(\mathbf{v} + 2\mathbf{u}) = -2\mathbf{u} - \mathbf{v}$$
$$\overline{CE} = \overline{BF} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

3. Vi noterar först att $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overline{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Detta ger

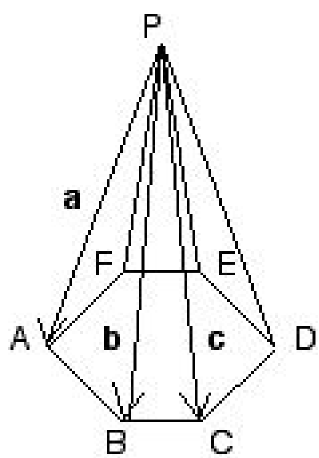
$$\overline{PD} = \overline{PA} + \overline{AD} = \overline{PA} + 2\overline{BC} = \mathbf{a} + 2(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$$

och

$$\begin{aligned} \overline{PE} &= \overline{PD} + \overline{DE} = \overline{PD} + \overline{BA} = \overline{PD} - \overline{AB} \\ &= \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c} \end{aligned}$$

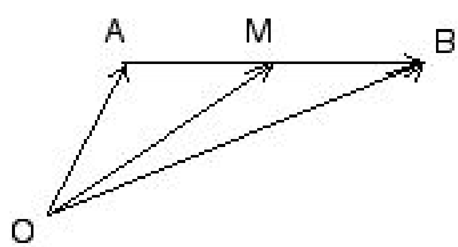
samt

$$\overline{PF} = \overline{PE} + \overline{EF} = \overline{PE} - \overline{BC} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$



4. Vi har $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ och $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, så

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}).$$



5.a) Enligt definitionen av punkten Q är

$$\overline{OQ} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$$

och enligt texten i häftet är

$$\overline{OT} = \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

b) Vi har

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= \overline{OQ} - \overline{OA} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) - \overline{OA} \\ &= \frac{1}{4}(-3\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \overline{AT} &= \overline{OT} - \overline{OA} = \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) - \overline{OA} \\ &= \frac{1}{3}(-3\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) \end{aligned}$$

och ser att

$$\overline{AQ} = \frac{3}{4}\overline{AT}.$$

Detta betyder att Q ligger på AT.

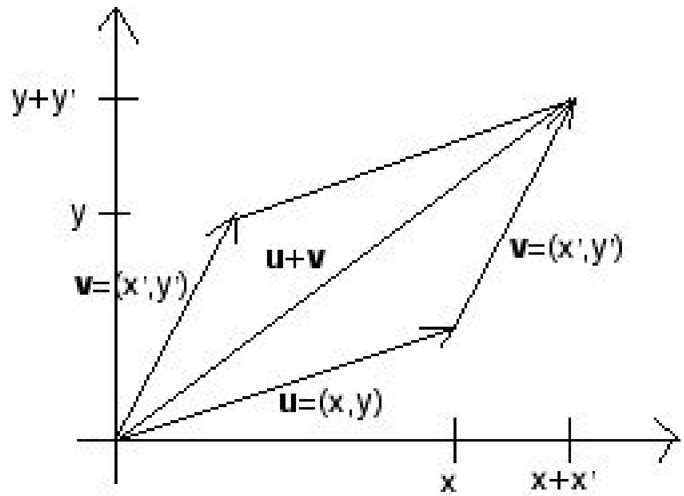
c) På samma sätt som i b) kan vi bevisa att punkten Q ligger på rymdmedianerna mot sidorna ABC, ACD och ABD också. Men då ligger den ju på alla fyra medianerna och med andra ord skär dessa varandra i Q.

d) I b) visade vi att $\overline{AQ} = \frac{3}{4}\overline{AT}$. Alltså är $\overline{QT} = \frac{1}{4}\overline{AT}$, så förhållandet är 3/4 till 1/4, vilket är detsamma som 3 till 1.

6. I summan $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ är den totala förflyttningen i x-led lika med $x+x'$ och i y-led är den $y+y'$. Alltså måste $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (x+x', y+y')$. Den vektor som är lika lång som $\mathbf{v}$ och är rakt motsatt riktad är $(-x', -y')$, så att $-\mathbf{v} = (-x', -y')$ och vi får

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (x - x', y - y').$$

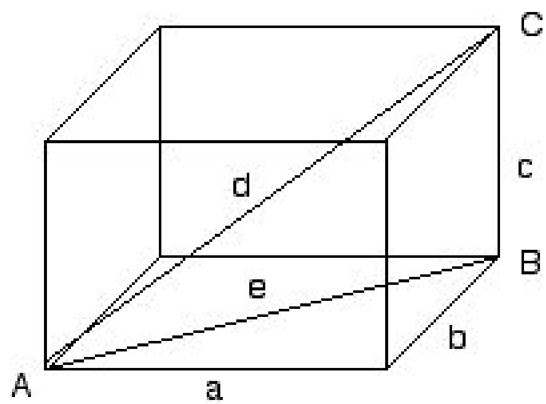
Den totala förflyttningen i x-led i $\lambda\mathbf{u}$ är λx och i y-led är den λy (oavsett om λ är positivt eller negativt eller 0). Alltså är $\lambda\mathbf{u} = (\lambda x, \lambda y)$.



7. $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = (4-3, 2-5) = (1, -3)$

8. För längden e av diagonalen i basytan gäller $e^2 = a^2 + b^2$. Eftersom $\triangle ABC$ är rätvinklig vid B, så kan vi använda Pythagoras sats en gång till:

$$d^2 = e^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



9. Avståndet är lika med längden av vektorn $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = (4-2, 4-3, 1-(-1)) = (2, 1, 2)$, som är $\sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$.

10. Vi har

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= (1-3, 9-1, 6-4) = (-2, 8, 2) \\
\overline{AC} &= (7-3, 5-1, 4-4) = (4, 4, 0) \\
\overline{BC} &= (7-1, 5-9, 4-6) = (6, -4, -2)
\end{aligned}$$

så längderna är

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= \sqrt{(-2)^2+8^2+2^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\\
|\overline{AC}| &= \sqrt{4^2+4^2+0^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\\
|\overline{BC}| &= \sqrt{6^2+(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}
\end{aligned}$$

11. Enligt cosinussatsen är

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2\cdot|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|\cdot\cos A$$

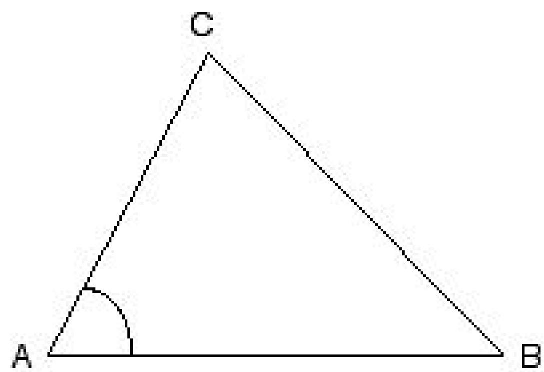
och sätter vi in längderna från uppgift 10 så får vi

$$56 = 72 + 32 - 2\cdot 6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\cos A = 104 - 96\cos A.$$

Detta ger

$$\cos A = \frac{104-56}{96} = \frac{1}{2},$$

så A är 60 grader.



12. Vektorn **w** i figuren är lika med **u** − **v**, dvs

$$\mathbf{w} = (1-7, 3-1) = (-6, 2).$$

Längderna av vektorerna är

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}| &= \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}\\
|\mathbf{v}| &= \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\\
|\mathbf{w}| &= \sqrt{(-6)^2+2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}
\end{aligned}$$

Beteckna vinkeln mellan **u** och **v** med α. Då ger cosinussatsen

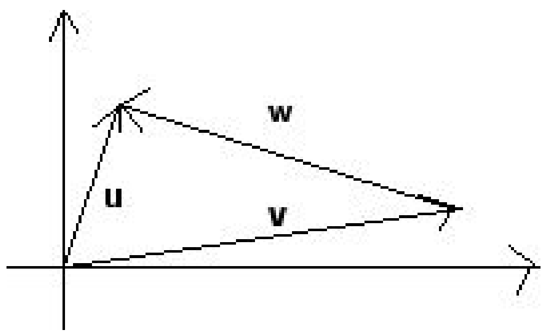
$$|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\cdot|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\alpha$$

som efter insättning av längderna blir

$$40 = 10 + 50 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 5\sqrt{2} \cos \alpha = 60 - 20\sqrt{5} \cos \alpha.$$

Alltså är

$$\cos \alpha = \frac{60 - 40}{20\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



13. Vi använder samma figur som till uppgift 12. Här är $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. Cosinussatsen ger

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha,$$

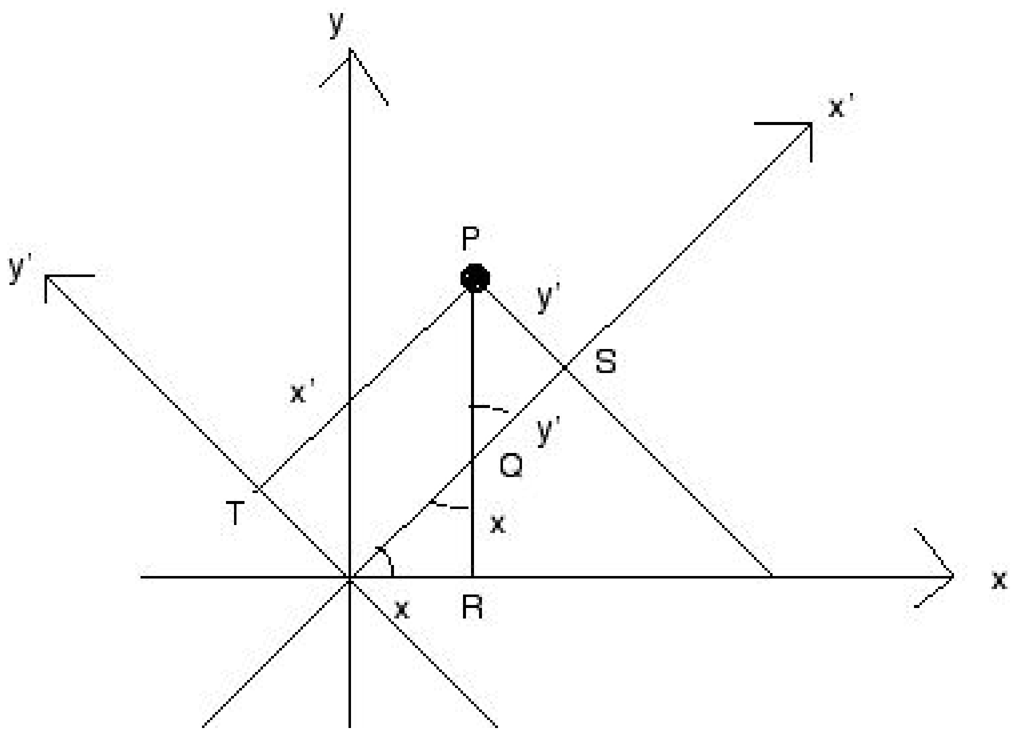
vilket betyder att

$$\begin{aligned}
2 \cdot |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 \\
&= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) \\
&= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2) \\
&= 2(x_1x_2 + y_1y_2)
\end{aligned}$$

Om vi dividerar första och sista ledet med 2 så får vi den sökta formeln.

14. Vi börjar med att härleda formler för koordinaterna i det koordinatsystem vi får om vi vrider axlarna 45 grader motsols. I figuren nedan finns både de vanliga x- och y-axlarna och de nya x'- och y'-axlarna, som bildar vinkeln 45 grader med x- respektive y-axeln. De markerade vinklarna är således 45 grader och de två trianglarna är halva kvadrater. Eftersom $|PS| = y'$ så är därför även $|QS| = y'$ och på samma sätt har vi $|OQ| = |QR| = x$, där O är origo. Vi har $|PR| = y$ och $|PQ| = \sqrt{2}\, y'$, så $y = x + \sqrt{2}\, y'$ och alltså $y' = (-x + y)/\sqrt{2}$. Vidare är $x' = |PT| = |OS| = |OQ| + |QS| = \sqrt{2}\, x + y'$, vilket ger $x' = (x + y)/\sqrt{2}$ om vi sätter in uttrycket för y'. Formlerna är sammanfattningsvis

$$x' = \frac{x + y}{\sqrt{2}},\ y' = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}.$$



I de "primade" koordinaterna är alltså

$$\mathbf{u} = \left(\frac{2+1}{\sqrt{2}}, \frac{-2+1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ \mathbf{v} = \left(\frac{3+2}{\sqrt{2}}, \frac{-3+2}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

och skalärprodukten i de nya koordinaterna är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 8.$$

I de ursprungliga koordinaterna är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8.$$

Anmärkning: Antag att $\mathbf{u} = (a, b)$ och $\mathbf{v} = (c, d)$ i de ursprungliga koordinaterna. I de nya är då

$$\mathbf{u} = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{-a+b}{\sqrt{2}}\right), \ \mathbf{v} = \left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}, \frac{-c+d}{\sqrt{2}}\right).$$

Skalärprodukten i de nya koordinaterna blir

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \frac{(a+b)(c+d)}{2} + \frac{(-a+b)(-c+d)}{2} \\
&= \frac{ac + ad + bc + bd + ac - ad - bc + bd}{2} = ac + bd,
\end{aligned}$$

vilket ju är skalärprodukten i de ursprungliga koordinaterna.

15. Låt $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{w} = (x_3, y_3, z_3)$.

a)
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

b)
$$\begin{aligned}
(\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) \\
&= (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 + (\lambda z_1)z_2 \\
&= \lambda(x_1x_2) + \lambda(y_1y_2) + \lambda(z_1z_2) \\
&= \lambda(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\
&= \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (x_1, y_1, z_1) \cdot ((x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)) \\
&= (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \\
&= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) \\
&= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + z_1z_2 + z_1z_3 \\
&= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}
\end{aligned}$$

d) Enligt c) är
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$$

och enligt a) är detta lika med
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Enligt c) igen är detta lika med
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

vilket enligt a) är lika med
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

e) Samma räkningar som i d)!

16. Sätt $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Då är
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

och $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\mathbf{u}|^2$, $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = |\mathbf{v}|^2$. Olikheten vi ska bevisa kan alltså skrivas
$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2.$$

Låt α vara vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Då är vänsterledet lika med

$$(|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\alpha)^2 = |\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2 \cos^2\alpha$$

så olikheten kan skrivas om som

$$|\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2 \cos^2\alpha \leq |\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2.$$

Om antingen $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ är nollvektorn, så är båda leden 0 och olikheten alltså sann. Annars kan vi förkorta med (de positiva talen) $|\mathbf{u}|^2$ och $|\mathbf{v}|^2$ och får den ekvivalenta olikheten

$$\cos^2\alpha \leq 1.$$

Men den är förstås sann eftersom $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ för alla α. Lägg märke till att det är viktigt att $|\mathbf{u}|^2$ och $|\mathbf{v}|^2$ är *positiva*, för om man dividerar eller multiplicerar en olikhet med ett negativt tal, så vänds olikhetstecknet.

17. Vi har

$$\overline{AB} = (6-4, 8-5, 1-2) = (2, 3, -1),\ \overline{AC} = (7-4, 4-5, 5-2) = (3, -1, 3)$$

så

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 6 - 3 - 3 = 0.$$

Alltså är vinkeln vid A rät.

18. Med $P = (0, 0, z)$ är $\overline{AP} = (-2, -3, z-4)$ och

$$\overline{AP} \cdot \overline{OA} = (-2, -3, z-4) \cdot (2, 3, 4) = -4 - 9 + 4(z-4) = 4z - 29.$$

För att vektorerna ska vara vinkelräta krävs att skalärprodukten är 0, dvs att $z = 29/4$. Alltså är $P = (0, 0, 29/4)$.

19. Låt M vara mittpunkten på AB och N mittpunkten på CD. Beteckna origo med O. Enligt övning 4 är

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2},\ \overline{ON} = \frac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2}.$$

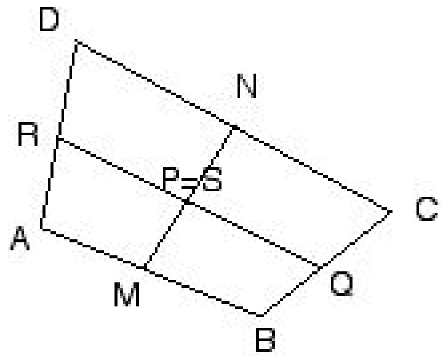
Om vi betecknar mittpunkten på MN med P så är

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OM} + \overline{ON}}{2} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Om mittpunkterna på BC och DA är Q respektive R och mittpunkten på QR är S, så får vi på samma sätt

$$\overline{OS} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Detta visar att $P = S$.



20. Beteckna hörnen och sidornas mittpunkter som i den vänstra figuren nedan och låt O vara origo. Då är t ex $\overline{OD} = (\overline{OB} + \overline{OC})/2$, så den vektor som bildar medianen AD är

$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = \frac{1}{2}(-2\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

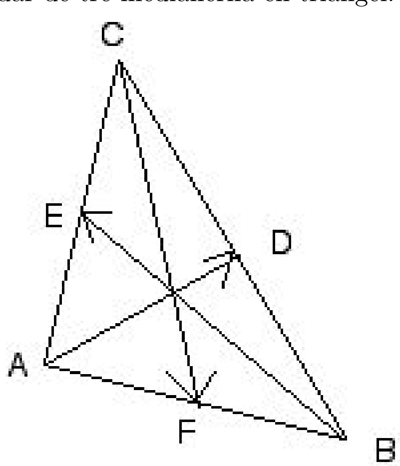
På samma sätt får vi

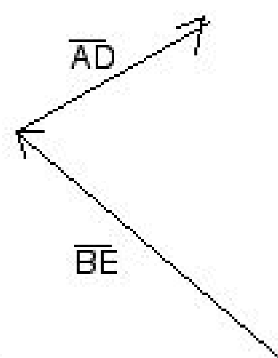
$$\begin{aligned}\overline{BE} &= \frac{1}{2}(\overline{OA} - 2\overline{OB} + \overline{OC})\\ \overline{CF} &= \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} - 2\overline{OC}).\end{aligned}$$

I den högra figuren har v placerat $\overline{AD}$ och $\overline{BE}$ så att den senare slutar där den förra börjar. Vektorn som går från slutet (spetsen på) av $\overline{AD}$ till början av $\overline{BE}$ är

$$\begin{aligned}-\overline{AD} - \overline{BE} &= -\frac{1}{2}(-2\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) - \frac{1}{2}(\overline{OA} - 2\overline{OB} + \overline{OC})\\ &= \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} - 2\overline{OC}) = \overline{CF}.\end{aligned}$$

Alltså bildar de tre medianerna en triangel.





21. Vi har

$$\begin{aligned}
\overline{OM_1} &= \frac{\overline{OA_1}+\overline{OA_2}}{2}\\
\overline{OM_2} &= \frac{\overline{OA_2}+\overline{OA_3}}{2}\\
\overline{OM_3} &= \frac{\overline{OA_3}+\overline{OA_4}}{2}\\
\overline{OM_4} &= \frac{\overline{OA_4}+\overline{OA_5}}{2}\\
\overline{OM_5} &= \frac{\overline{OA_5}+\overline{OA_6}}{2}\\
\overline{OM_6} &= \frac{\overline{OA_6}+\overline{OA_1}}{2},
\end{aligned}$$

vilket ger

$$\overline{OM_1}-\overline{OM_2}+\overline{OM_3}-\overline{OM_4}+\overline{OM_5}-\overline{OM_6}$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{OA_1}+\overline{OA_2}-\overline{OA_2}-\overline{OA_3}+\overline{OA_3}+\overline{OA_4}-\overline{OA_4}-\overline{OA_5}+\overline{OA_5}+\overline{OA_6}-\overline{OA_6}-\overline{OA_1})=\mathbf{0}$$

Alltså är

$$\overline{OA_6}=\overline{OM_1}-\overline{OM_2}+\overline{OM_3}-\overline{OM_4}+\overline{OM_5}.$$

22. Vi vill finna tal x, y så att $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=\mathbf{c}$. Insättning ger

$$x(2,1)+y(1,2)=(-2,5) \quad \text{eller} \quad (2x+y, x+2y)=(-2,5).$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x+y &= -2\\ x+2y &= 5 \end{cases}$$

Ett sätt att lösa det är att notera att $y=-2-2x$ enligt den första ekvationen och sätta in det i den andra. Det ger $x+2(-2-2x)=5$ eller $-3x-4=5$, som ger $x=-3$. Insättning ger $y=-2-2(-3)=4$, så $\mathbf{c}=-3\mathbf{a}+4\mathbf{b}$. För att skriva som en linjärkombination av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$ kan man förstås göra på samma sätt, men enklare är att lösa ut $\mathbf{b}$ ur sambandet $\mathbf{c}=-3\mathbf{a}+4\mathbf{b}$, vilket ger

$$\mathbf{b}=\frac{3}{4}\mathbf{a}+\frac{1}{4}\mathbf{c}.$$

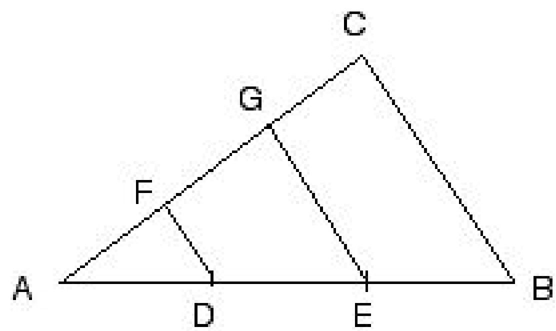
23. Vi har

$$\overline{EF}=\overline{EA}+\overline{AF}=-\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$$

och

$$\overline{BG}=\overline{BA}+\overline{AG}=-\overline{AB}+\frac{2}{3}\overline{AC}$$

(här har vi använt diverse likformighet ur den euklidiska gemetrin). Det finns inget tal t sådant att $t\overline{EF}=\overline{BG}$, så vektorerna är inte parallella.



24. Beteckna vektorerna med **u** respektive **v**. Då är

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1,-3,2)\cdot(2,1,a) = 2a-1.$$

Men vi kan också skriva skalärprodukten som

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos 60^\circ = \sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+a^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{14(a^2+5)}$$

vilket ger ekvationen

$$\frac{1}{2}\sqrt{14(a^2+5)} = 2a-1. \qquad (1)$$

Om vi kvadrerar och hyfsar till så får vi $a^2-8a=33$, som har rötterna $a_1=-3$, $a_2=11$. Då vi kvadrerade kan det ha uppkommit falska rötter, så nu måste vi kontrollera. Insättning av $a_1=-3$ i ekvationen (1) ger $VL=7$, $HL=-7$, vilket inte stämmer. Insättning av $a_2=11$ ger $VL=HL=21$, så svaret är $a=11$.

25. Vi kan anta att basens hörn är $A=(1,1,0), B=(-1,1,0), C=(-1,-1,0), D=(1,-1,0)$ och att toppen är $E=(0,0,2)$. Det är vinkeln mellan t ex $\overline{EA}$ och $\overline{EB}$ som vi ska beräkna. Nu är

$$\overline{EA}=(1,1,-2),\ \overline{EB}=(-1,1,-2),$$

så å ena sida är skalärprodukten

$$\overline{EA}\cdot\overline{EB} = -1+1+4 = 4.$$

Om den sökta vinkeln är α, så är å andra sidan

$$\overline{EA}\cdot\overline{EB} = |\overline{EA}|\cdot|\overline{EB}|\cdot\cos\alpha = 6\cos\alpha.$$

Vi får $\cos\alpha = 4/6 = 2/3$.

26. Sidlängderna i $\triangle OPQ$ är

$$|\overline{OP}| = \sqrt{4^2+1^2+1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 11^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2},$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(5-4)^2 + (-4-1)^2 + (11-1)^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}.$$

Sidlängderna i $\triangle ABC$ är

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(1-1)^2 + (3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2},$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(2-1)^2 + (6-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

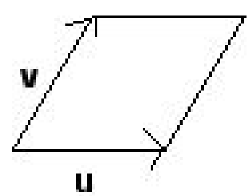
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(2-1)^2 + (6-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{14}$$

Enligt SSS är trianglarna likformiga (i skalan 3).

27. Beteckna de vektorer som utgör sidorna med **u** och **v** som i figuren. Eftersom figuren är en romb, så är $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$. Diagonalerna är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ och skalärprodukten är

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = 0.$$

Alltså är diagonalerna vinkelräta.



28. Vi placerar rätblocket så att hörnen har koordinaterna

$$A = (0,0,0),\ B = (3,0,0),\ C = (3,1,0),\ D = (0,1,0),\ E = (0,0,2),$$

$$F = (3,0,2),\ G = (3,1,2),\ H = (0,1,2).$$

Två diagonaler är då

$$\overline{AG} = (3,1,2),\ \overline{DF} = (3,-1,2);$$

beteckna vinkeln mellan dem med α. Då är

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AG} \cdot \overline{DF}}{|\overline{AG}||\overline{DF}|} = \frac{9-1+4}{14} = \frac{6}{7}$$

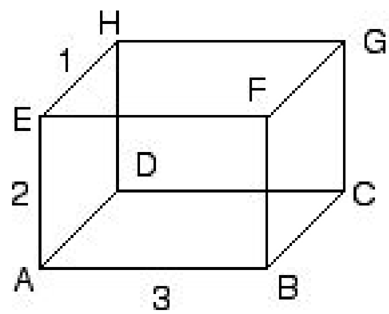
($\alpha \approx 31$ grader). En tredje diagonal är $\overline{BH} = (-3,1,2)$; beteckna vinkeln mellan den och $\overline{AG}$ med β. Då är

$$\cos\beta = \frac{\overline{AG} \cdot \overline{BH}}{|\overline{AG}||\overline{BH}|} = \frac{-9+1+4}{14} = -\frac{2}{7}$$

Detta innebär att β är trubbig; cosinus av den spetsiga vinkeln är 2/7. Den fjärde diagonalen är $\overline{CE} = (-3, -1, 2)$ och om vinkeln mellan den och $\overline{AG}$ är γ så gäller

$$\cos\gamma = \frac{\overline{AG} \cdot \overline{CE}}{|\overline{AG}||\overline{CE}|} = \frac{-9 - 1 + 4}{14} = -\frac{3}{7}$$

Cosinus av den spetsiga vinkeln är 3/7.



29. Med beteckningar som i ledningen ska vi beräkna och förenkla uttrycket $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ (eftersom $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$ för alla vektorer $\mathbf{u}$; vi använder övning 12 d och e):

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ &= 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

Detta är precis vad vi skulle bevisa.

30. Vi väljer diagonalerna så att

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{b} + \mathbf{c},\ \mathbf{d}_b = \mathbf{a} + \mathbf{c},\ \mathbf{d}_c = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Rymddiagonalen är

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Övning 12 d ger nu (efter lite räknande och förenklande)

$$d^2 = \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = a^2 + b^2 + c^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

Men vi får å andra sidan

$$\begin{gathered} d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 - a^2 - b^2 - c^2 \\ = \mathbf{d}_a\cdot\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b\cdot\mathbf{d}_b + \mathbf{d}_c\cdot\mathbf{d}_c - a^2 - b^2 - c^2 \\ = (\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + (\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c}) + (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - a^2 - b^2 - c^2 \\ = b^2 + c^2 + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + a^2 + c^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - a^2 - b^2 - c^2 \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}, \end{gathered}$$

vilket är lika med d^2.

31. Låt M vara mittpunkten på AB; då är $\overline{CM} = (\overline{CA} + \overline{CB})/2$. Alltså är

$$\begin{aligned} m^2 &= \overline{CM} \cdot \overline{CM} = \frac{1}{4}(\overline{CA} + \overline{CB}) \cdot (\overline{CA} + \overline{CB}) \\ &= \frac{1}{4}(|\overline{CA}|^2 + |\overline{CB}|^2 + 2\overline{CA} \cdot \overline{CB}) \\ &= \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + 2\overline{CA} \cdot \overline{CB})) \end{aligned}$$

Enligt definitionen av skalärprodukt och cosinussatsen är

$$2\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 2|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| \cdot \cos C = |\overline{CA}|^2 + |\overline{CB}|^2 - |\overline{AB}|^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

och insättning i formeln ovan ger

$$m^2 = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + a^2 + b^2 - c^2) = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

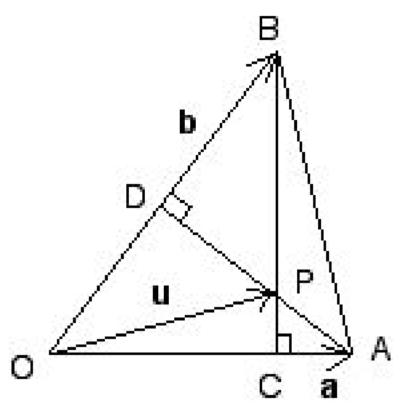
32. Vi har $\mathbf{u} - \mathbf{a} = \overline{AP}$, så $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \overline{AP} = 0$, ty $\overline{AP}$ är parallell med höjden $\overline{AD}$, som ju är vinkelrät mot $\mathbf{b}$. På samma sätt får vi $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{b}) = 0$. Alltså är

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u},$$

vilket ger

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Men $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overline{BA}$, så $\mathbf{u}$ är vinkelrät mot den tredje sidan BA. Om vi förlänger OP så att den skär BA så kommer vi med andra ord att få höjden från O.



Lösningar till övningarna i Kapitel 3 i Vektorgeometri

1. En punkt P ligger på linjen genom P_0 och P_1 om och endast om vektorerna $\overline{P_0P}$ och $\overline{P_0P_1}$ är parallella, dvs om och endast om $\overline{P_0P} = t\overline{P_0P_1}$ för något tal t. Vi har $\overline{P_0P_1} = (3, 1)$ och vektorn $\overline{P_0P}$ är för de olika punkterna

$$(6, 4),\ (9, 5),\ (15, 5),\ (-9, -4),\ (39, 3),\ (-51, -19).$$

Hur undersöker man om det finns ett tal t sådant att $\overline{P_0P} = t\overline{P_0P_1}$? Finns det exempelvis ett tal t sådant att $(6, 4) = t(3, 1)$? Vi har ju $t(3, 1) = (3t, t)$, så i så fall måste $3t = 6$ och $t = 4$. De här två sambanden kan inte vara uppfyllda samtidigt, vilket betyder att $(6, 4)$ inte är parallell med $(3, 1)$ och således att $(8, 8)$ inte ligger på linjen. Vi har däremot $(15, 5) = 5(3, 1)$, så $(15, 5)$ är parallell med $(3, 1)$ och $(17, 9)$ ligger därför på linjen. Av vektorerna ovan är bara $(15, 5)$ parallell med $(3, 1)$, och därför ligger endast punkten $(17, 9)$ på linjen.

2.a) För $t = 2$ får vi punkten $(x, y) = (2 + 3 \cdot 2, 4 + 2) = (8, 6)$. För $t = 3$ får vi punkten $(x, y) = (2 + 3 \cdot 3, 4 + 3) = (11, 7)$. För $t = -7$ får vi punkten $(x, y) = (2 + 3 \cdot (-7), 4 + (-7)) = (-19, -3)$.
b) Vi såg i uppgift 1 att $(17 - 2, 9 - 4) = (15, 5) = 5(3, 1)$, vilket betyder att det t-värde som motsvarar $(17, 9)$ är $t = 5$.

3. Vi har $\overline{P_1P_0} = (2 - 5, 4 - 5) = (-3, -1)$ och $\overline{P_1P} = (x - 5, y - 5)$. Alltså är $\overline{P_1P}$ parallell med $\overline{P_1P_0}$ om och endast om $(x - 5, y - 5) = t(-3, -1)$ för något tal t. Andra sätt att skriva detta är

$$(x, y) = (5, 5) + t(-3, -1) \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x - 5 &= -3t \\ y - 5 &= -t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x &= 5 - 3t \\ y &= 5 - t \end{cases}$$

4. Linjens ekvation kan skrivas $(x - 7, y - 4) = t(-1, 2)$. Här är $P = (x, y)$ en godtycklig och $P_0 = (7, 4)$ en fix punkt på linjen. Alltså är $\mathbf{u} = (-1, 2)$ parallell med linjen och därmed en riktningsvektor.

5. Riktningsvektorerna för linjerna är $(8, -6) = 2(4, -3)$, $(-4, 3) = (-1)(4, -3)$ respektive $(-12, 9) = (-3)(4, -3)$. Dessa är parallella och det följer att linjerna också är det. För att avgöra om två parallella linjer sammanfaller (dvs är lika) så räcker det att undersöka om de har någon gemensam punkt. En punkt på den första linjen är t ex $P_1 = (13, -6)$ (för $t = 0$). Ligger den på den andra linjen? I så fall måste det finnas ett tal t sådant att $(30, -18) + t(-4, 3) = (13, -6)$. Detta ger de två sambanden $30 - 4t = 13$ och $-18 + 3t = -6$. Av den första ekvationen får vi $t = 17/4$ och av den andra $t = 4$. Eftersom dessa inte är lika så ligger $(13, -6)$ inte på den andra linjen och det följer att linjerna inte sammanfaller. Ligger då P_1 på den tredje linjen? Vi får nu ekvationerna $13 = 1 - 12t$, $-6 = 3 + 9t$, vilka båda har lösningen $t = -1$. Den första och den tredje linjen sammanfaller således.

6. Låt $P = (x, y)$ vara en godtycklig punkt på linjen och sätt $P_0 = (4, -1)$. Då är $\overline{P_0P} = (x - 4, y - (-2)) = (x - 4, y + 2)$ vinkelrät mot $\mathbf{n} = (2, 5)$, vilket med

skalärprodukt uttrycks som $\overline{PP_0} \cdot \mathbf{n} = 0$. Insättning ger $2(x-4)+5(y+2)=0$, vilket också kan skrivas t ex $2x+5y+2=0$.

7. Vektorn $\mathbf{n} = (1,4)$ är vinkelrät mot $(4,-1)$ och är med andra ord en normalvektor till linjen.

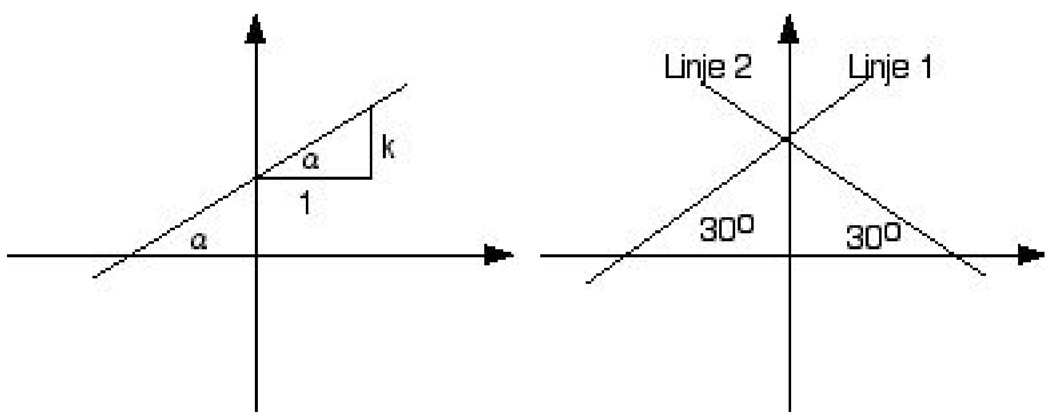
8. För $t=0$ och $t=1$ får vi t ex punkterna $P_0 = (7,8)$ respektive $P_1 = (5,9)$. En riktningsvektor är $\mathbf{v} = (-2,1)$. Vektorn $\mathbf{n} = (1,2)$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$ eftersom $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ och är därför en normalvektor. Linjens ekvation på normalform kan skrivas $\overline{PP_0} \cdot \mathbf{n} = 0$, där P är en godtycklig punkt på linjen. Om vi sätter $P = (x,y)$ så ger detta $1 \cdot (x-7) + 2 \cdot (y-8) = 0$, vilket kan skrivas

$$y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{23}{2}.$$

Lutningen är alltså $k = -1/2$. Detta kan man också få direkt med hjälp av riktningsvektorn $(-2,1)$; lutningen är $1/(-2) = -1/2$.

9. Punkterna $P_0 = (1,1)$ och $P_1 = (6,-1)$ ligger på linjen. Ekvationen kan skrivas $2(x-1)+5(y-1)=0$ eller $\overline{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$, där $P = (x,y)$ och $\mathbf{n} = (2,5)$. Alltså är $\mathbf{n}$ en normalvektor och då är $\mathbf{v} = (-5,2)$ en riktningsvektor. Ett sätt att skriva linjens ekvation på parameterform är $(x-1, y-1) = t(-5,2)$.

10. I figuren nedan till vänster ser vi linjen $y = kx+m$. Enligt definitionen av tangens är $\tan\alpha = k/1 = k$. I uppgiften finns det två möjligheter beroende på vilken vinkel det är som avses, se figuren till höger. Linje 1 har ekvationen $(y-5)/(x-0) = \tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$ och linje 2 har ekvationen $(y-1)/(x-0) = \tan 150^\circ = -\sqrt{3}$. Dessa kan skrivas $y = x/\sqrt{3}+5$ respektive $y = -x/\sqrt{3}+5$.



11. Två linjer är parallella om och endast om deras riktningsvektorer är det. En riktningsvektor för en linje på parameterform, $(x-x_0, y-y_0) = t(a,b)$, är ju $\mathbf{v} = (a,b)$, men hur hittar man en riktningsvektor för en linje på formen $ax+by=c$, som ju både b) och c) är? Låt $P_1 = (x_1,y_1)$ och $P_2 = (x_2,y_2)$ vara två punkter på linjen $ax+by=c$. Då gäller $ax_1+by_1=c$ och $ax_2+by_2=c$.

Subtraherar vi dessa så får vi $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$. Eftersom vektorn $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ är parallell med linjen, så är $\mathbf{n} = (a, b)$ en normalvektor och därmed exempelvis $\mathbf{v} = (b, -a)$ en riktningsvektor.

Riktningsvektorer för linjerna i uppgiften är $(4, -2)$, $(6, 3)$, $(1, 2)$ respektive $(2, 1)$. Av dessa är de andra och den fjärde parallella, så linjerna i b) och d) är parallella.

12. För en punkt (x, y) på den första linjen gäller att $x = -16 + 7t$, $y = -7 + 4t$ för något tal t. För att denna punkt ska ligga på den andra linjen måste samtidigt $2x + 3y + 1 = 0$. Detta ger

$$2(-16 + 7t) + 3(-7 + 4t) + 1 = 0, \quad \text{varav} \quad 26t - 52 = 0 \quad \text{och} \quad t = 2.$$

Skärningspunkten är således $P = (-16+7\cdot 2, -7+4\cdot 2) = (-2, 1)$. Skärningspunkten mellan den andra och den tredje linjen finner vi på exakt samma sätt och här får vi ekvationen

$$2(3 + t) + 3(-11 + 8t) + 1 = 0 \quad \text{varav} \quad t = 1.$$

Linjerna skär varandra i $Q = (3 + 1, -11 + 8 \cdot 1) = (4, -3)$. Till sist bestämmer vi skärningen mellan den första och den tredje linjen. För punkterna på dessa gäller

$$\begin{cases} x = -16 + 7t \\ y = -7 + 4t \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} x = 3 + s \\ y = -11 + 8s \end{cases}$$

för några tal t och s. Lägg märke till att vi inte kan ha samma beteckning för parametern i ekvationerna för linjerna; det finns ju ingen anledning till att parametervärdet skulle vara samma i skärningspunkten. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} -16 + 7t = 3 + s \\ -7 + 4t = -11 + 8s \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} 7t - s = 19 \\ 4t - 8s = -4 \end{cases}$$

Vi kan dividera den andra ekvationen med 4 och får

$$\begin{cases} 7t - s = 19 \\ t - 2s = -1 \end{cases}$$

Det finns flera sätt att lösa ett sådant här ekvationssystem; ett som kan göras till ett systematiskt sätt att lösa alla system är att multiplicera den övre ekvationen med 2 och sedan subtrahera den undre. Då får vi i VL $2(7t - s) - (t - 2s) = 13t$ och i HL $2 \cdot 19 - (-1) = 39$. Alltså gäller $13t = 39$ och $t = 3$. Man kan räkna ut värdet på s genom att sätta in $t = 3$ i någon av ekvationerna, men det är inte nödvändigt att ha s-värdet för att beräkna skärningspunkten. Insättning i den första linjens ekvation ger att linjerna skär varandra i $R = (-16+7\cdot 3, -7+4\cdot 3) = (5, 5)$.

13. En riktnigsvektor för linjen genom A och C är $\mathbf{u} = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)$. Eftersom linjen går genom $A = (1, 2)$ så har den ekvationen $(x - 1, y - 2) =$

$t(2,-1)$. På samma sätt får man ekvationen $(x-2, y-4) = s(2,-4)$ för linjen genom B och D. I skärningspunkten gäller

$$\begin{cases} 1+2t &= 2+2s \\ 2-t &= 4-4s \end{cases}$$

vilket som i föregående uppgift ger $t = 4/3$ och skärningspunkten

$$P = (1 + 2 \cdot 4/3, 2 - 4/3) = (11/3, 2/3).$$

14. Om $P = (x, y)$ är en punkt på den första linjen så gäller $\overline{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$, där $P_0 = (-3, 1)$ och $\mathbf{n} = (7, 4)$. Insättning ger $7(x + 3) + 4(y - 1) = 0$ eller $7x+4y+17 = 0$. En riktningsvektor för den andra linjen är $\mathbf{u} = (10-2, -7-6) = (8, -13)$, så dess ekvation är $(x-2, y-6) = t(8, -13)$ eller $x = 2+8t$, $y = 6-13t$. Insättning i den första linjens ekvation ger

$$7(2 + 8t) + 4(6 - 13t) + 17 = 0,$$

varav $4t + 55 = 0$ och $t = -55/4$. Skärningspunkten är

$$(2 + 8 \cdot (-55/4), 6 - 13 \cdot (-55/4)) = (-108, 729/4).$$

(Den här uppgiften har en sensmoral, nämligen att man inte ska förvänta sig ”enkla” svar på alla uppgifter ens i läroböcker!)

15.a) Som vi såg i uppgift 11 så har linjen $y = 3x + 1$ eller $3x - y + 1 = 0$ normalvektorn $\mathbf{n} = (3, -1)$. Alltså är $(3, -1)$ en riktningsvektor för den sökta linjen, som då har ekvationen $(x - 3, y - 2) = t(3, -1)$.
b) För en punkt på den andra linjen gäller $x = 3 + 3t$, $y = 2 - t$, vilket vi sätter in i $3x - y + 1 = 0$. Då får vi $3(3 + 3t) - (2 - t) + 1 = 0$, dvs $10t + 8 = 0$. Alltså är $t = -8/10 = -4/5$ i skärningspunkten, som därför är $(3+3(-4/5), 2-(-4/5)) = (3/5, 14/5)$.
c) Låt L vara en linje och P_0 en punkt som inte ligger på L. Låt L' vara den linje som går genom P_0 och är vinkelrät mot L och beteckna linjernas skärningspunkt med P_1. Med det vinkelräta avståndet mellan L och P_0 menar man avståndet mellan P_0 och P_1, dvs $|P_0P_1|$. Här får vi att avståndet är

$$\sqrt{(3 - 3/5)^2 + (2 - 14/5)^2} = \sqrt{(12/5)^2 + (-4/5)^2} = \sqrt{160}/5 = 4\sqrt{10}/5.$$

16.a) En punkt $P = (x, y, z)$ ligger på linjen om och endast om vektorn $\overline{P_0P} = (x - 2, y - 3, z - (-1)) = (x - 2, y - 3, z + 1)$ är parallell med vektorn $(2, -1, 6)$, dvs om och endast om $(x - 2, y - 3, z + 1) = t(2, -1, 6)$ för något tal t. För $P = (16, -4, 40)$ får vi $(14, -7, 41) = (2t, -t, 6t)$, dvs de tre sambanden $2t = 14$, $-t = -7$ och $6t = 41$. Men det finns inget värde på t som samtidigt uppfyller dessa tre. Punkten ligger därför inte på linjen. För $P = (-4, 0, -19)$ får vi $(-6, -3, -18) = (2t, -t, 6t)$ och inte heller här finns det något t som uppfyller alla tre sambanden. För att undersöka den tredje punkten skriver vi först

$$\frac{2}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 2\sqrt{2} + 2.$$

Vi måste undersöka om det finns något tal t som uppfyller

$$(2\sqrt{2}+2-2, 3-\sqrt{2}-3, 2\sqrt{18}-1+1) = t(2,-1,6)$$

eller

$$(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{18}) = (2t, -t, 6t).$$

De två första sambanden ger $t = \sqrt{2}$, vilket också uppfyller det tredje eftersom $2\sqrt{18} = 2\sqrt{2\cdot 3^2} = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.
b) Vi vill ha $\overline{P_0Q} = 2\cdot\overline{P_0P_1} = 2\cdot(2,-1,6) = (4,-2,12)$. Om vi betecknar origo med O så gäller därför $\overline{OQ} = \overline{OP_0} + \overline{P_0Q} = (2,3,-1)+(4,-2,12) = (6,1,11)$, varför $Q = (6,1,11)$.
c) För en punkt som ligger i xy-planet gäller att z-koordinaten är 0. Detta ger $1 = 6t$ och alltså $t = 1/6$. Skärningspunkten är således $(2+2\cdot 1/6, 3-1/6, 0) = (7/3, 17/6, 0)$.

17.Linjerna har samma riktningsvektor, så ekvationen är $(x,y,z) = (2,1,8) + t(4,-2,1)$.

18. I en eventuell skärningspunkt gäller

$$\begin{cases} 2+2t &= 5+s \\ 3-t &= -6+2s \\ -1+6t &= 2+5s \end{cases}$$

Vi betraktar bara de två första ekvationerna, som kan skrivas $2t-s=3$ respektive $t+2s=9$. Vi löser dessa som i tidigare uppgifter och får $t=3$ och $s=3$. För att visa att linjerna verkligen skär varandra *måste vi kontrollera att de här värdena uppfyller även den tredje ekvationen* $-1+6t = 2+5s$. Insättning ger VL$= -1+6\cdot 3 = 17$, HL$= 2+5\cdot 5 = 17$. Alltså finns en skärningspunkt och dess koordinater får vi t ex genom att sätta in $t=3$ i den första linjens ekvation. Punkten är $(2+2\cdot 3, 3-3, -1+6\cdot 3) = (8,0,17)$.

19.a) Låt P_0 vara den givna punkten och $P=(x,y,z)$ en godtycklig punkt i planet. Då är vektorn $\overline{P_0P} = (x-1, y-3, z-(-2)) = (x-1, y-3, z+2)$ vinkelrät mot $\mathbf{n} = (2,-4,5)$, vilket med skalärprodukt kan skrivas $\overline{P_0P}\cdot\mathbf{n} = 0$ eller $2(x-1)-4(y-3)+5(z+2) = 0$. Förenklar vi så får vi ekvationen $2x-4y+5z+20 = 0$.
b) Insättning visar att $(-5,5,2)$ och $(-3,6,2)$ ligger i planet.
c) Längs z-axeln är $x=y=0$. Sätter vi in detta i planets ekvation så får vi $5z+20=0$, varför $z=-4$. Skärningspunkten är således $(0,0,-4)$.

20. En punkt i planet är $P_0 = (0,0,1)$. Planets ekvation kan skrivas $3x+4y-2z = 3\cdot 0+4\cdot 0-2\cdot 1$ eller $3(x-0)+4(y-0)+(-2)(z-1) = 0$. Om vi sätter $\mathbf{n} = (3,4,-2)$ och låter $P=(x,y,z)$ vara en godtycklig punkt i planet, så betyder detta att $\mathbf{n}\cdot\overline{P_0P} = 0$. Men vektorn $\overline{P_0P}$ är parallell med planet, så $\mathbf{n}$ är en normalvektor.

21. En normalvektor till planet är $\mathbf{n} = (-3,6,6)$ och en riktningsvektor till linjen är $\mathbf{v} = (4,-1,3)$. Skalärprodukten av dem är $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = (-3)\cdot 4+6\cdot(-1)+6\cdot 3 = 0$,

vilket visar att de är vinkelräta. Härav följer att linjen är parallell med planet. Den skulle dock kunna ligga i planet och för att visa att det inte är fallet så räcker det att visa att någon punkt på linjen inte ligger i planet. men man visar lätt genom insättning att $(2, 3, 4)$ inte ligger i planet. Ty $-3\cdot 2+6\cdot 3+6\cdot 4 = 36 \neq 35$.

22.a) I skärningspunkten (x, y, z) gäller både att $x = 7 + t$, $y = -5 + t$, $z = 5$ och att $-x + 4y + z = 5$. Insättning ger ekvationen $-(7+t)+4(-5+t)+5 = 5$, varav $3t - 27 = 0$ och $t = 9$. Skärningspunkten blir $(7+9, -5+9, 5) = (16, 4, 5)$.
b) Normalvektorn är $\mathbf{n} = (-1, 4, 1)$ och riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Beteckna vinkeln mellan dem med α. Då gäller $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\alpha$. Insättning ger $-1 + 4 = \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha$ eller $\cos\alpha = 3/\sqrt{36} = 1/2$. Alltså är $\alpha = 60$ grader.
c) Vinkeln mellan planet och linjen är $90 - 60 = 30$ grader.

23. Vi måste lösa ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + z & = & 4 \\ 2x + y - z & = & -4 \\ 3x + 10y + 5z & = & 18 \end{array}\right. \tag{1}$$

Vi ska till att börja med ersätta detta med ett annat system som vi får genom att subtrahera 2 gånger den första ekvationen från den andra och tre gånger den första ekvationen från den tredje. Den andra ekvationen blir då

$$2x + y - z - 2(x + 2y + z) = -4 - 2 \cdot 4 \quad \text{eller} \quad -3y - 3z = -12.$$

Vi dividerar med -3 och får $y + z = 4$. Den tredje ekvationen blir

$$3x + 10y + 5z - 3(x + 2y + z) = 18 - 3 \cdot 4 \quad \text{eller} \quad 4y + 2z = 6.$$

Vi dividerar med 2 och får $2y+z = 3$. Nu resonerar vi så här: En punkt (x, y, z) som uppfyller ekvationerna (1) måste också uppfylla sambanden $y + z = 4$ och $2y + z = 3$. Men subtraherar vi den första av dessa ekvationer från den andra så får vi direkt $y = -1$ och då ser vi att $z = 5$. Insättning i t ex $x + 2y + z = 4$ ger $x - 2 + 5 = 4$ eller $x = 1$. Skärningspunkten är således $(1, -1, 5)$.

24. En punkt som ligger på båda planen uppfyller även sambandet

$$(x - 11y + 2z + 8) + (3x - y - 2z) = 0 \quad \text{eller} \quad 4x - 12y + 8 = 0.$$

Vi förkortar med 4: $x-3y+2 = 0$. Låt oss införa en parameter t genom $t = y$. Då blir $x = 3y-2 = -2+3t$. Insättning av detta i $x-11y+2z+8 = 0$ (det går lika bra att arbeta med ekvationen för det andra planet) ger $-2+3t-11t+2z+8 = 0$, vilket ger $z = -3 + 4t$. Skärningslinjen är alltså $(x, y, z) = (-2 + 3t, t, -3 + 4t)$, vilket vi även kan skriva $(x, y, z) = (-2, 0, -3) + t(3, 1, 4)$.

25. Vi bestämmer först ekvationen för ℓ_1: Addition av $x + 6y + 6z = 13$ och $3x - 6y + 2z = -1$ ger $4x + 8z = 12$. Förkortning med 4 ger $x + 2z = 3$. Sätt $t = z$; då blir $x = 3 - 2t$. Insättning i $x + 6y + 6z = 13$ ger $3 - 2t + 6y + 6t = 13$, varav $6y = 10 - 4t$ och $y = 5/3 - 2t/3$. Skärningslinjen är $(x, y, z) = (3, 5/3, 0) + t(-2, -2/3, 1)$. En riktningsvektor är då $(-2, -2/3, 1)$

och då är även $\mathbf{u} = (-6, -2, 3)$ en riktningsvektor (det är lättare att arbeta med heltal). För att bestämma ekvationen för ℓ_2 subtraherar vi ekvationerna $3x - 6y + 2z = -1$ och $3x - 4y + z = 0$ och får då $2y - z = 1$. Sätt $y = s$; då blir $z = -1 + 2s$ och vi får till sist $3x - 6s + 2(-1 + 2s) = -1$, varav $x = 1/3 + 2s/3$. ℓ_2 har alltså ekvationen $(x, y, z) = (1/3, 0, -1) + s(2/3, 1, 2)$. En riktningsvektor är $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$. Vi har $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -12 - 6 + 18 = 0$, så vinkeln är rät. (Observera att man kan ange ekvationen för en linje på oändligt många olika sätt!)

26. Om vi kan bestämma a så att punkten $(2, a, -1)$ ligger i planet och b så att vektorn $(b, 2b, 1)$ är parallell med det, så är vi klara. Insättning av punktens koordinater i planets ekvation ger $4 - 5a - 4 = 11$, varför $a = -11/5$. Vektorn $(b, 2b.1)$ är parallell med planet om och endast om den är vinkelrät mot normalvektorn $(2, -5, 4)$. Skalärprodukten är $2b - 10b + 4 = -8b + 4$. Vi får villkoret $-8b + 4 = 0$, varför $b = 1/2$.

27. Vi har $y = 7x - 45$ och insättning i cirkelns ekvation ger $(x - 3)^2 + (7x - 46)^2 = 25$. Utveckling ger $50x^2 - 650x + 2125 = 25$, vilket efter hyfsning blir $x^2 - 13x + 42 = 0$. Kvadratkomplettering ger $(x - 13/2)^2 + 42 - (13/2)^2 = 0$ eller $(x - 13/2)^2 = 1/4$. Alltså är $x = 13/2 \pm 1/2$ och rötterna är $x_1 = 6$, $x_2 = 7$. Motsvarande y-värden får man genom att sätta in i linjens ekvation och skärningspunkterna blir $(6, 3)$ och $(7, 4)$.

28. En riktningsvektor för linjen är $(8 - 0, 5 - 9) = (8, -4) = 4(2, -1)$, så även $(2, -1)$ är en riktningsvektor. En ekvation för linjen är alltså $(x, y) = (0, 9) + t(2, -1) = (2t, 9 - t)$. Cirkelns radie är

$$\sqrt{(2-6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20},$$

så dess ekvation är $(x-2)^2+(y-3)^2 = 20$. Vi ska bestämma skärningspunkten/erna mellan linjen och cirkeln och sätter in $x = 2t$, $y = 9 - t$:

$$(2t - 2)^2 + (9 - t - 3)^2 = 20,$$

vilket efter hyfsning blir $t^2-4t+4 = 0$. Detta kan skrivas $(t-2)^2 = 0$, så den enda roten är $t = 2$. Linjen och cirkeln har därför bara en enda punkt gemensamt, vilket är ett annat sätt att säga att linjen tangerar cirkeln. Tangeringspunkten är $(2 \cdot 2, 9 - 2) = (4, 7)$.

29. Ekvationen är $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-(-1))^2 = 3^2$, dvs $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. Sätter vi $(x, y, z) = (3, 4, 0)$ så blir VL $(3-1)^2 + (4-2)^2 + 1^2 = 9$, så $(3, 4, 0)$ ligger på sfären.

30. För skärningen mellan en sfär och ett plan finns det tre möjligheter: de skär inte varandra alls, de skär varandra i en punkt eller så skär de varandra längs en cirkel. I det andra fallet säger man att planet tangerar sfären. Det finns åtminstone två sätt att lösa uppgiften.

Metod 1: Vi repeterar först en viktig egenskap hos tangenten till en cirkel. Låt M vara cirkelns medelpunkt och låt P vara en punkt på cirkeln. Då är tangenten till cirkeln i P vinkelrät mot radien MP och å andra sidan gäller att om en linje genom P är vinkelrät mot MP så är den tangent till cirkeln i P. Motsvarande gäller för en sfär. Låt M vara medelpunkten i och P en punkt på sfären. Då är radien MP vinkelrät mot tangentplanet till sfären i P. Annorlunda uttryckt är $\overline{MP}$ normalvektor till tangentplanet i P. Omvänt gäller att om radien MP är vinkelrät mot ett plan genom P så tangeras cirkeln av planet i P.

I den här uppgiften kontrollerar man först lätt att punkten $P = (2, 4, 5)$ ligger både på planet och på sfären. Sfärens medelpunkt är $M = (0, 1, -1)$ och vektorn från medelpunkten till P är $\mathbf{u} = \overline{MP} = (2, 3, 6)$. Men detta är ju planets normalvektor, så planet tangerar cirkeln i P.

Metod 2: Den här metoden är helt algebraisk. Vi ska visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 & = & 49 \\ 2x + 3y + 6z & = & 46 \end{cases}$$

bara har en enda lösning. Om en punkt (x, y, z) uppfyller dessa båda samband, så uppfyller den också sambandet

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 - 2(2x + 3y + 6z) = 49 - 2 \cdot 46.$$

Efter utveckling och förenkling blir detta

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y + z^2 - 10z + 45 = 0.$$

Vi kompletterar de tre kvadraterna:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 0.$$

Kvadraten på ett (reellt) tal är alltid ≥ 0, så enda möjligheten är att alla tre termerna i vänsterledet är 0, dvs $(x-2)^2 = (y-4)^2 = (z-5)^2 = 0$. Detta ger $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$.

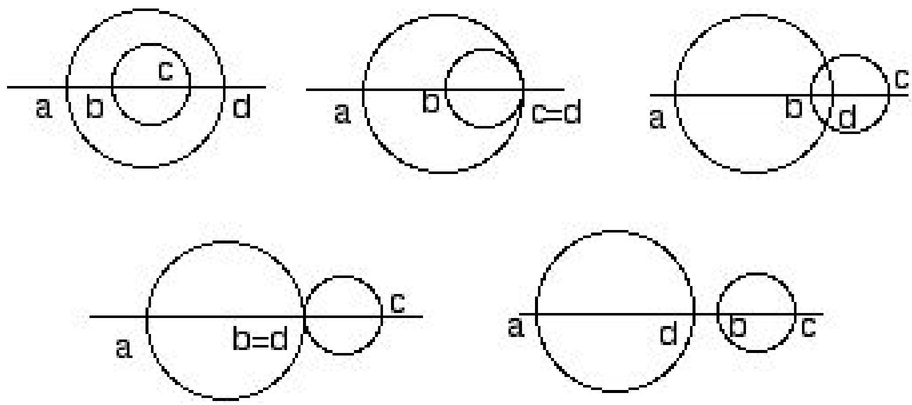
Anmärkning: I den matematiska analysen finns metoder att bestämma ekvationen för tangentplanet till t ex en sfär i en given punkt.

34. Ett annat sätt att skriva cirkelns ekvation är $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Insättning av $x = 4$, $y = 6$ visar att $P = (4, 6)$ ligger på cirkeln. Vektorn från medelpunkten $M = (1, 2)$ till P är vinkelrät mot tangenten, så $\mathbf{n} = \overline{MP} = (4-1, 6-2) = (3, 4)$ är en normal till tangenten. Eftersom den går genom P så är en ekvation för den

$$(3, 4) \cdot (x-4, y-6) = 0 \quad \text{eller} \quad 3x + 4y = 36.$$

35. Om man på något sätt kan hitta en gemensam punkt för sfärerna så har man förstås visat att de skär varandra. I det här fallet är det dock inte uppenbart hur man ska hitta en sådan gemensam punkt, så man måste resonera på något annat sätt. I figuren nedan ser vi de fem möjligheter som finns för två sfärer: den ena ligger inuti den andra, de skär varandra och de ligger ett stycke från varandra. I andra fallet kan de antingen tangera varandra från in- eller utsidan,

eller skära varandra längs en cirkel. Linjen i figurerna är linjen genom sfärernas medelpunkter. Den större sfärens skärningspunkten med linjen är a och d och den mindre skär linjen i b och c. Som vi ser så ligger punkterna i olika ordning beroende på vilken geometrisk situation som föreligger. En strategi för att lösa uppgiften är tydligen att bestämma de här skärningspunkterna och undersöka i vilken ordning de kommer.



Sfärernas medelpunkter är $P = (1, 3, 2)$ och $Q = (2, 1, 3)$. Linjen som går genom punkterna har en riktningsvektor $\mathbf{v} = \overline{PQ} = (2 - 1, 1 - 3, 3 - 2) = (1, -2, 1)$ och ekvationen $(x, y, z) = (1, 3, 2) + t \cdot (1, -2, 1)$. Vi sätter in $x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = 2 + t$ i den första sfärens ekvation:

$$(1 + t - 1)^2 + (3 - 2t - 3)^2 + (2 + t - 2)^2 = 16, \quad \text{som ger} \quad t = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Parametervärdena för punkterna a och d är således $t_a = -2\sqrt{6}/3$ respektive $t_d = 2\sqrt{6}/3$. Sätter vi in i den andra sfärens ekvation så får vi

$$(1+t-2)^2+(3-2t-1)^2+(2+t-3)^2 = 4 \quad \text{eller} \quad (t-1)^2+(2-2t)^2+(t-1)^2 = 4.$$

Här kan man bespara sig en del arbete genom att observera att $(2 - 2t)^2 = 4(t-1)^2$. Vi kan tydligen bryta ut faktorn $(t-1)^2$ och får ekvationen $6(t-1)^2 = 4$, vilken ger $t = 1 \pm \sqrt{6}/3$. Vi har tydligen $t_b = 1 - \sqrt{6}/3$ och $t_c = 1 + \sqrt{6}/3$. Av $1 < \sqrt{6} < 3$ följer nu att

$$t_a < t_b < t_d < t_c.$$

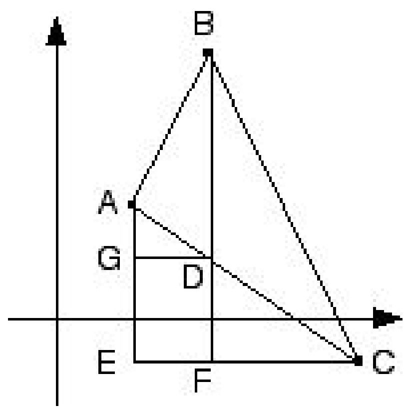
Sfärerna skär därför varandra längs en cirkel.

Lustigt nog är det väldigt enkelt att bestämma ekvationen för det plan som innehåller skärningscirkeln. Om en punkt (x, y, z) uppfyller båda ekvationerna i uppgiften, så uppfyller den också sambandet

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 - ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2) = 16 - 4.$$

Förenklar vi detta så får vi $x-2y+z=6$, vilket är ekvationen för ett plan. Alla punkter på skärningen mellan sfärerna måste uppfylla sambandet $x-2y+z=6$, så det måste i själva verket vara det sökta planet.

36. Låt D vara skärningspunkten mellan bisektrisen från B och sidan AB. Vi har $|BA| = 2\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, alltså $|BC|/|BA| = 2$. Enligt bisektrissatsen är då $|DC|/|DA| = 2$. Från A drar vi en lodrät linje och från C en vågrät. Deras skärningspunkt betecknar vi med E. Från D drar vi också en lodrät och en vågrät linje. Använder vi topptriangelsatsen så får vi $|CF|/|EF| = |EG|/|AG| = 2$. Vi har $|EC| = 8-2 = 6$ och $|AE| = 4$, varav $|CF| = 4$ och $|AG| = 4/3$ Alltså är $D = (8-4, 3-4/3) = (4, 5/3)$. Eftersom B och D har samma x-koordinat så har bisektrisen ekvationen $x = 4$. (Detta visar att vi inte hade behövt bestämma y-koordinaten för D, men det kunde vi inte veta från början.)



37. Låt Π vara det plan som går genom C och är vinkelrätt mot AB. Beteckna dess skärningspunkt med AB med E. Då är CE vinkelrät mot AB, så CE måste i själva verket vara höjden från G, dvs $E = D$. Vi har $\overline{AB} = (4-2, 5-3, 3-(-1)) = (2,2,4) = 2\cdot(1,1,2)$. Alltså är $\mathbf{v} = (1,1,2)$ en normalvektor till Π. Planets ekvation är då $1\cdot(x-5) + 1\cdot(y-(-1)) + 2\cdot(z-7) = 0$ eller $x+y+2z-18 = 0$. Linjen genom AB har ekvationen $(x,y,z) = (2,3,-1) + t\cdot(1,1,2) = (2+t, 3+t, -1+2t)$. Insättning i ekvationen för Π ger $2+t+3+t+2(-1+2t)-18 = 0$. Lösningen är $t = 15/6 = 5/2$. Insättning i linjens ekvation ger att $D = (2+5/2, 3+5/2, -1+5) = (9/2, 11/2, 4)$.