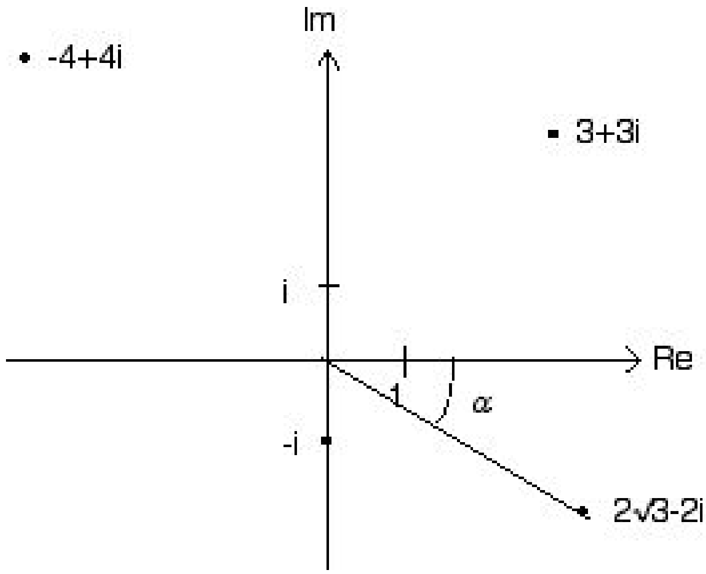
Lösningar till övningarna i Kapitel 1 i Funktionslära

1.



Absolutbelopp:

$$
\begin{aligned}
|3+3i| &= \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2} \\
|-4+4i| &= \sqrt{(-4)^2+4^2} = 4\sqrt{2} \\
|2\sqrt{3}-2i| &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{16} = 4 \\
|-i| &= \sqrt{0^+(-1)^2} = 1
\end{aligned}
$$

Argumenten för $3+3i$ och $-4+4i$ är 45 respektive 135 grader. Argumentet för $-i$ är 270 grader. Beteckna vinkeln mellan positiva reella axeln och linjen från 0 till $2\sqrt{3}-2i$ med α. Då är

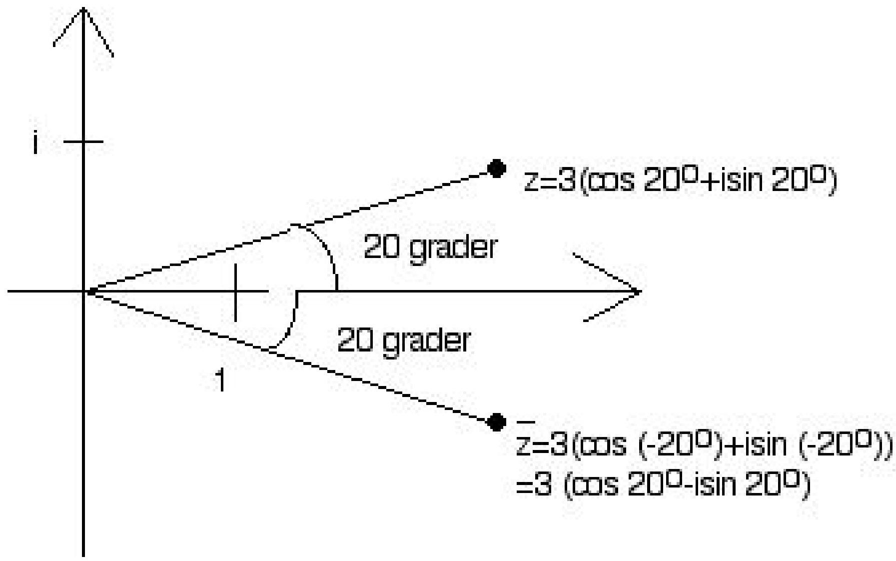
$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

varav följer att $\alpha = 30°$. Argumentet för $2\sqrt{3}-2i$ är då $360-30=330$ grader.

2. I det komplexa talplanet är $\bar{z}$ spegelbilden av z i reella axeln. Alltså är

$$\arg\bar{z} = 360° - \arg z,$$

men man kan också säga att $\arg\bar{z} = -\arg z$ eftersom argumentet är entydigt bestämt bara så när som multipler av 360 grader. Om $z = 3(\cos 20° + i\sin 20°)$, så är $\arg z = 20°$ och $\arg\bar{z} = 360° - 20° = 340°$ eller alternativt $\arg\bar{z} = -20°$.



3. Som vi såg i övning 2 gäller att $\arg \bar{z} = -\arg z$.

5. $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $|w| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $zw = (-2 + i)(3 + 2i) = -6 - 4i + 3i - 2 = -8 - i$

6.a) $\arg z^2 = 2 \arg z = 200°$,

$$z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\cos 200° + i \sin 200°) = \frac{1}{4}(\cos 200° + i \sin 200°)$$

b)

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{1}{8}(\cos 300° + i \sin 300°) = \frac{1}{8}(\cos(-60°) + i \sin(-60°)) \\ &= \frac{1}{8}(\cos 60° - i \sin 60°) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$z^4 = \frac{1}{16}(\cos 400° + i \sin 400°) = \frac{1}{16}(\cos 40° + i \sin 40°)$$

7. Punkterna ligger i hörnen av en regelbunden femhörning. Notera att $z^5 = \cos(5 \cdot 72°) + i \sin(5 \cdot 72°) = \cos 360° + i \sin 360° = 1$.

8. Vi har $|z^2| = |z|^2$ och $\arg z^2 = 2 \arg z$. Eftersom talet $9(\cos 36° + i \sin 36°)$ har absolutbelopp 9 och argument $36°$, så får vi $|z|^2 = 9$ och $2 \arg z = 36° + n \cdot 360°$ för något heltal n (minns att argumentet är entydigt bestämt bara så när som på multipler av $360°$). Alltså är $|z| = 3$ och $\arg z = 18° + n \cdot 180°$ för något n. Detta ger

$$z = 3(\cos(18° + n \cdot 180°) + i \sin(18° + n \cdot 180°)).$$

Frågan är nu om vi får olika tal z för olika värden på n och svaret är nej eftersom

$$\begin{aligned}&\cos(18^\circ + (n+2)\cdot 180^\circ) + i\sin(18^\circ + (n+2)\cdot 180^\circ)\\ &= \cos(18^\circ + n\cdot 180^\circ + 360^\circ) + i\sin(18^\circ + n\cdot 180^\circ + 360^\circ)\\ &= \cos(18^\circ + n\cdot 180^\circ) + i\sin(18^\circ + n\cdot 180^\circ)\end{aligned}$$

Av den här lilla räkningen följer att alla jämna n ger samma z och att alla udda n ger samma z. De två rötterna till ekvationen är således

$$\begin{aligned} z_0 &= 3(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)\\ z_1 &= 3(\cos(18^\circ + 180^\circ) + i\sin(18^\circ + 180^\circ) = -3(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)\end{aligned}$$

Lägg märke till att $z_1 = -z_0$, vilket ju stämmer bra eftersom $(-z_0)^2 = z_0^2$.

9. På polär form är $z = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$, varför

$$\begin{aligned} z^5 &= 2^5(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ) = 2^5(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ))\\ &= 2^5(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ) = 2^5(1/2 - i\sqrt{3}/2) = 16(1 - i\sqrt{3})\end{aligned}$$

10. Vi har $2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$, så

$$\begin{aligned}(2+2i)^5 &= (2\sqrt{2})^5(\cos(5\cdot 45^\circ) + i\sin(5\cdot 45^\circ))\\ &= 2^7\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)\\ &= 2^7\sqrt{2}(\cos(45^\circ + 180^\circ) + i\sin(45^\circ + 180^\circ))\\ &= 2^7\sqrt{2}(-\cos 45^\circ - i\sin 45^\circ) = -2^7(1+i)\end{aligned}$$

Vidare är $\sqrt{3} - i = 2(\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ))$, så

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - i)^3 &= 2^3(\cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ))\\ &= 2^3(0 - i) = -8i\end{aligned}$$

11. Multiplikation med w^2 betyder vridning $2\cdot 45 = 90$ grader motsols, dvs $w^2 = i$. Av detta följer att $|w|^2 = |w^2| = |i| = 1$, så $|w| = 1$. Vidare är $2\arg w = \arg i + n\cdot 360^\circ$, så $\arg w = 45^\circ + n\cdot 180^\circ$. Som i övning 8 ser man att alla jämna n ger samma w och att alla udda n ger samma w. För n jämnt är $w = (1+i)/\sqrt{2}$ och för n udda är $w = -(1+i)/\sqrt{2}$. Det förra talet betyder vridning 45 grader moturs (positiv led), medan det senare betyder vridning samma vinkel medurs (negativ led).

12. Talet har absolutbelopp 1 eftersom alla tal av formen $\cos\alpha + i\sin\alpha$ har belopp 1. Argumentet är $3\cdot 17^\circ - 6\cdot 61^\circ = -315^\circ$, så talet är lika med

$$\begin{aligned}\cos(-315^\circ) + i\sin(-315^\circ) &= \cos(360^\circ - 315^\circ) + i\sin(360^\circ - 315^\circ)\\ &= \cos 45^\circ + i\sin 45^\circ = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

13. Vi har $|\sqrt{6}+i\sqrt{2}| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$ och om vi sätter $\alpha = \arg(\sqrt{6}+i\sqrt{2})$, så är

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Talet ligger uppenbarligen i första kvadranten, så $\alpha = 30$ grader. Alltså är

$$\sqrt{6}+i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$$

och vi får

$$\begin{aligned}
(\sqrt{6}+i\sqrt{2})^{-4} &= (2\sqrt{2})^{-4}(\cos(-4\cdot 30^\circ) + i\sin(-4\cdot 30^\circ)) \\
&= \frac{1}{64}(\cos(-120^\circ) + i\sin(-120^\circ)) \\
&= \frac{1}{64}(\cos 120^\circ - i\sin 120^\circ) \\
&= \frac{1}{64}(-\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ) \\
&= \frac{1}{64}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{1+i\sqrt{3}}{128}
\end{aligned}$$

14. Av $z^3 = 1$ följer till att börja med att $|z|^3 = |z^3| = 1$, så $|z| = 1$. Vidare är $3\arg z = \arg 1 + n\cdot 360^{\cdot} = n\cdot 360^\circ$ för något heltal n, så $\arg z = n\cdot 120^\circ$. Alltså är rötterna till ekvationen

$$z_n = \cos(n\cdot 120^\circ) + i\sin(n\cdot 120^\circ).$$

Nu ger dock inte alla värden på n olika tal z eftersom

$$\begin{aligned}
z_{n+3} &= \cos((n+3)\cdot 120^\circ) + i\sin((n+3)\cdot 120^\circ) \\
&= \cos(n\cdot 120^\circ + 360^\circ) + i\sin(n\cdot 120^\circ + 360^\circ) \\
&= \cos(n\cdot 120^\circ) + i\sin(n\cdot 120^\circ) = z_n
\end{aligned}$$

Det är tydligen bara z_0, z_1 och z_2 vi behöver beräkna:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\
z_1 &= \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = -\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
z_2 &= \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Lägg märke till att $z_2 = \overline{z_1}$. Detta beror på att ekvationen har reella koefficienter; de icke-reella rötterna kommer då i konjugerade par.

15. På exakt samma sätt som i övning 14 ser vi att rötterna är

$$z_n = \cos(n\cdot 60^\circ + i\sin(n\cdot 60^\circ),\ n = 0,1,2,3,4,5.$$

17. En lösning är $z = -1$. Sätt $z = -w$. Då blir $w^3 = (-z)^3 = -z^3 = -(-1) = 1$, så talen w är rötterna till ekvationen vi löste i övning 14.

19. Vi får först att $|z|^5 = |z^5| = 32$, så $|z| = 2$. Vidare är $5 \arg z = 80° + n \cdot 360°$ och $\arg z = 16° + n \cdot 72°$. Rötterna är

$$z_n = 2(\cos(16° + n \cdot 72°) + i \sin(16° + n \cdot 72°)$$

och som i övning 14 ser vi att det räcker att ta $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Rötterna utgör hörnen i en regelbunden femhörning med medelpunkt i 0.

20. Vi bestämmer först absolutbelopp och argument av högerledet:

$$|8 + 8i\sqrt{3}| = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$$

och om α är argumenten så är

$$\cos \alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Då talet ligger i första kvadranten så är argumentet 60 grader. Alltså kan ekvationen skrivas

$$z^4 = 2(\cos 60° + i \sin 60°)$$

och som i tidigare övningar får vi rötterna

$$z_n = \sqrt[4]{2}(\cos(15° + n \cdot 90°) + i \sin(15° + n \cdot 90°)).$$

Också som tidigare ser man att det räcker att ta $n = 0, 1, 2, 3$. Man kan uttrycka rötterna på ett annat sätt också. Eftersom $i^4 = 1$ så är $(i^n z_0)^4 = (i^4)^n z_0^4 = 8 + 8i\sqrt{3}$, varav följer att rötterna även kan skrivas

$$z_n = i^n z_0 = 2^{1/4} i^n (\cos 15° + i \sin 15°).$$

Man kan för övrigt visa att

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \ \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

21. Å ena sidan är

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$$

och å andra sidan är

$$\begin{aligned}(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 &= (\cos \alpha)^3 + 3(\cos \alpha)^2 \cdot i \sin \alpha + 3 \cos \alpha \cdot (i \sin \alpha)^2 + (i \sin \alpha)^3 \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i(3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha)\end{aligned}$$

Jämför vi realdelarna i de två uttrycken så får vi

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

och jämför vi imaginärdelarna så får vi

$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

De här två formlerna blir lite snyggare om vi i den första ersätter $\sin^2\alpha$ med $1-\cos^2\alpha$ och i den andra ersätter $\cos^2\alpha$ med $1-\sin^2\alpha$. Då får vi

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ \sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,. \end{aligned}$$

22. Definitionen av tangens och additionsformlerna för sinus och cosinus ger

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Förkorta med $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

Lösningar till övningarna i Kapitel 2 i Funktionslära

1. Summan är geometrisk med kvoten $-1/4$ och första termen är 12. Sista termen är $-3/4^8 = 12 \cdot (-1/4)^9$, så talet n i Sats 1 är 9. Summan är således lika med

$$12 \cdot \frac{(-1/4)^{10} - 1}{-1/4 - 1} = 12 \cdot \frac{1 - 1/4^{10}}{5/4} = \frac{48}{5}(1 - 1/2^{20}).$$

2. Vi börjar med en variant av Wimbledonmetoden, fast nu måste vi tänka oss någon annan idrott eller spel än tennis; närmare bestämt behöver vi tänka oss ett spel i vilket tre personer deltar (i stället för två som i tennis). Vi kan tänka oss ett lämpligt kortspel. När jag gick i skolan spelade vi emellanåt tremanswhist, jag vet inte om det förekommer fortfarande, men vi tänker oss det spelet.

Vi tänker oss en turnering i tremanswhist i vilken det från början deltar 3^9 personer. De delas in i grupper om 3 i varje, så att det blir $3^9/3 = 3^8$ grupper. I varje grupp spelas whist och den person som segrar går vidare till nästa omgång. I omgång nummer två delas de 3^8 segrarna in i $3^8/3 = 3^7$ grupper om tre personer och segrarna i dessa går i sin tur vidare till den tredje omgången osv. Totalt blir det $3^8 + 3^7 + 3^6 + \ldots + 3^2 + 3 + 1$ kortspelsomgångar.

Vi ska nu räkna ut antalet omgångar på ett annat sätt. Beteckna det med N. I varje omgång är det ju två personer som slås ut, så $2N$ är totala antalet utslagna deltagare när turneringen är över. Men till slut återstår ju en enda segrare, så antalet utslagna personer är $3^9 - 1$. Alltså är $2N = 3^9 - 1$, dvs $N = (3^9 - 1)/2$. Men vi såg ju ovan att $N = 3^8 + 3^7 + 3^6 + \ldots + 3^2 + 3 + 1$, så det följer nu att

$$3^8 + 3^7 + 3^6 + \ldots + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^9 - 1}{2}.$$

Ett annat sätt att beräkna summan $3^8 + 3^7 + 3^6 + \ldots + 3^2 + 3 + 1$ är att använda metoden i beviset för Sats 1: beteckna summan med N. Då är

$$\begin{aligned} 3N &= 3(3^8 + 3^7 + 3^6 + \ldots + 3^2 + 3 + 1) \\ &= 3^9 + 3^8 + \ldots + 3^3 + 3^2 + 3 \\ &= 3^9 + 3^8 + 3^7 \ldots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 - 1 = 3^9 + N - 1 \end{aligned}$$

varför $2N = 3N - N = 3^9 - 1$ och $N = (3^9 - 1)/2$.

3. Kvoten är $1/3$ och första termen 7, så summan av serien är

$$\frac{7}{1 - 1/3} = \frac{21}{2}.$$

4. Kvoten är $1/(\sqrt{2} + 1)$ och första termen $1/\sqrt{2}$, så seriens summa är

$$\frac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

5. Om $k = 1$ så är summan lika med $(n+1)a$. Om $k \neq 1$ så gäller enligt Sats 1 att

$$a + ak + ak^2 + \ldots + ak^n = a \cdot \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}.$$

Om $k > 1$ så växer k^{n+1} obegränsat när n växer, dvs k^{n+1} kan bli hur stort som helst bara n väljs stort nog. Om $k \leq -1$ så växlar k^{n+1} tecken; det är positivt om $n+1$ är jämnt och negativt om $n+1$ är udda. Men absolutbeloppet $|k^{n+1}| = |k|^{n+1}$ växer obegränsat.

6. Kvoten är $2/3$, så seriens summa är $4/(1 - 2/3)$. Summan av de n första termerna är

$$s_n = 4 + 8/3 + \ldots + 4 \cdot (2/3)^{n-1} = 4 \cdot \frac{1 - (2/3)^n}{1 - 2/3},$$

så

$$s - s_n = 4 \cdot \frac{(2/3)^n}{1 - 2/3} = 12 \cdot (2/3)^n.$$

Vi måste alltså hitta det minsta talet n som uppfyller $12 \cdot (2/3)^n < 1$. Om vi noterar att $12 = 2^2 \cdot 3$ så kan olikheten skrivas $2^{n+2} < 3^{n-1}$. Prövar man med några värden på n så finner man att det minsta möjliga n är 7. Det går också att lösa olikheten på ett mer ”systematiskt” sätt genom att logaritmera olikheten $12 \cdot (2/3)^n < 1$ (lg betyder tiologaritmer):

$$\lg 12 + n \lg(2/3) < \lg 1 = 0 \Leftrightarrow n > \frac{-\lg 12}{\lg(2/3)} = \frac{\lg 12}{\lg(3/2)}.$$

(När man dividerar med $\lg(2/3)$ måste man vända olikhetstecknet eftersom $\lg(2/3) < 0$.) Enligt räknaren är HL $\approx$, så det minsta heltalet som duger är $n = 7$.

7. Summan är lika med

$$\frac{i^{11} - 1}{i - 1} = \frac{i^8 \cdot i^3 - 1}{i - 1} = \frac{-i - 1}{i - 1} = i.$$

Ett annat sätt är att notera att $1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$, så att

$$\begin{aligned} 1 + i + \ldots + i^{10} &= (1 + i + i^2 + i^3) + i^4(1 + i + i^2 + i^3) + i^8(1 + i + i^2) \\ &= 1 + i + i^2 = 1 + i - 1 = i. \end{aligned}$$

8. Kvoten är $1 + i$ och första termen $1 + i$, så summan är

$$(1 + i) \cdot \frac{(1 + i)^8 - 1}{1 + i - 1}.$$

Nu är $(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$, så detta är lika med

$$(1 + i) \cdot \frac{(2i)^4 - 1}{1 + i - 1} = 15(1 - i).$$

9. Kvoten är $i/2$ och summan av serien är

$$\frac{1}{1-i/2} = \frac{2}{2-i} = \frac{2(2+i)}{4+1} = \frac{2}{5}(2+i).$$

10. För att vi ska kunna summera serien måste kvoten 2^{-x} uppfylla $-1 < 2^{-x} < 1$, vilket gäller då $x > 0$. Summan är i så fall

$$\frac{2^{-x}}{1-2^{-x}} = \frac{1}{2^x - 1}.$$

11. Beräkningen förenklas avsevärt om man går över till polär form:

$$w = \frac{2}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ).$$

Vi ser att

$$w^{12} = \cos(-12\cdot 30^\circ) + i\sin(-12\cdot 30^\circ) = \cos(-360^\circ) + i\sin(-360^\circ) = 1,$$

så

$$w + w^2 + w^3 + \ldots + w^{11} = w\cdot\frac{w^{11}-1}{w-1} = \frac{w^{12}-w}{w-1} = \frac{1-w}{w-1} = -1.$$

12. Om t ex $a = 0$ så är både VL och HL lika med b^n. Om $a \neq 0$ så kan vi uppfatta summan som geometrisk med första term a^n och kvot b/a. Summan är

$$a^n\cdot\frac{(b/a)^{n+1}-1}{b/a-1} = \frac{a^{n+1}((b/a)^n - 1)}{b-a} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

13. Kvadratkomplettering ger

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

så nollställena är

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

14. Sats 1 ger

$$p(x) = \frac{x^6-1}{x-1} \quad \text{för } x \neq 1.$$

Nollställena får vi genom att lösa ekvationen $x^6 - 1 = 0$, $x \neq 1$, och det har vi gjort i Övning 15 i Kapitel 1. Nollställena utgör fem hörn i en regelbunden sexhörning med medelpunkt i 0. Det sjätte hörnet ligger i 1.

15.a) $p(x) = (x^4-1)/(x-1)$ för $x \neq 1$. Nollställena är rötterna till $x^4 = 1$, $x \neq 1$, dvs -1 och $\pm i$.
b) Enligt Övning 12 är $p(x) = (x^2 - 2^4)/(x-2)$, $x \neq 2$. Nollställena är rötterna till $x^4 = 2^4$, $x \neq 2$, dvs -2 och $\pm 2i$.

Lösningar till övningarna i Kapitel 3 i Funktionslära

1.a)

$(2+x)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3\cdot x + 6\cdot 2^2\cdot x^2 + 4\cdot 2\cdot x^3 + x^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

b)

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 &= x^5 + 5\cdot x^4\cdot\frac{1}{x} + 10\cdot x^3\frac{1}{x^2} + 10\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^3} + 5\cdot x\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\\ &= x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}.\end{aligned}$$

2. På polär form är $\sqrt{3}+i = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$, så

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^5 &= 2^5(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = 32(-\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)\\ &= 32(-\sqrt{3}/2 + i/2) = 16(-\sqrt{3}+i)\end{aligned}$$

Pascals triangel ger

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^5 &= (\sqrt{3})^5 + 5\cdot(\sqrt{3})^4\cdot i + 10\cdot(\sqrt{3})^3\cdot i^2 + 10\cdot(\sqrt{3})^2\cdot i^3 + 5\cdot\sqrt{3}\cdot i^4 + i^5\\ &= 9\sqrt{3} + 45i - 30\sqrt{3} - 30i + 5\sqrt{3} + i = -16\sqrt{3} + 16i = 16(-\sqrt{3}+i)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1}{k!(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\end{aligned}$$

4.a)

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rangle = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1$$

b)

$$
\begin{aligned}
\langle \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \rangle + \langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \rangle &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \cdot n!}{k \cdot (k-1)!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k!(n-k+1) \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{kn!}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(k+n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \langle \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \rangle
\end{aligned}
$$

5. Enligt binomialsatsen är koefficienten lika med

$$\binom{14}{11} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

6. En allmän term har utseendet

$$\binom{10}{k}(x^3)^{10-k}\frac{1}{(x^2)^k} = \binom{10}{k}x^{30-3k-2k} = \binom{10}{k}x^{30-5k}.$$

Termen är konstant om den inte beror på x, vilket är fallet om och endast om $30 - 5k = 0$, dvs om $k = 6$. Termen i fråga är

$$\binom{10}{6} = 210.$$

7. Formeln följer omedelbart om man väljer $a = b = 1$ i binomialsatsen.

8. Summan kan skrivas

$$\binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 2 + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot 2^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^0 \cdot 2^n,$$

vilket enligt binomialsatsen är lika med $(1+2)^n = 3^n$.

Lösningar till övningarna i Kapitel 4 i Funktionslära

1. Ett polynom av grad 1 är ekvationen för en linje. Om lutningen är k och linjen går genom punkten (a, b) så är dess ekvation $y - b = k(x - a)$.

2. Kvadratkomplettera:

$$y = x^2 - 7x + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Sätt nu $t = x - 7/2$, $s = y + 1/4$; då blir $s = t^2$. Origo i t, s-systemet ligger i punkten $(7/2, -1/4)$ i x, y-systemet. Kurvans minimipunkt har koordinaterna $(7/4, -1/4)$.

3. Innan vi kvadratkompletterar bryter vi ut 1/2:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 6x) + 4 = \frac{1}{2}((x + 3)^2 - 3^2) + 4 = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - \frac{1}{2}.$$

Sätt $t = x + 3$, $s = y + 1/2$; då gäller $s = t^2/2$. Origo i t, s-systemet ligger i punkten $(-3, -1/2)$ i x, y-systemet. Kurvans minimipunkt har koordinaterna $(-3, -1/2)$.

4.a) x-koordinaten för minimipunkten är enligt texten minus halva koefficienten för x, dvs $\sqrt{2 + \sqrt{3}}/2$.
b) Substitutionen är $t = x - \sqrt{2 + \sqrt{3}}/2$.
c) Vi börjar med att skriva om den konstanta termen i y:

$$\frac{1}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{64 - 16 \cdot 3} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Nu blir

$$y = \left(t + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\right)^2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\left(t + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\right) + \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = t^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Om vi sätter $s = y + \sqrt{3}/2$ så blir $s = t^2$. Kurvans minimipunkt är

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}}/2, -\sqrt{3}/2).$$

5.

$$(x + 8)(x - 2) = (x + 3 + 5)(x + 3 - 5) = (x + 3)^2 - 25$$

Sätt $t = x + 3$, $s = y + 25$; då blir $s = t^2$. Minimipunkten är $(-3, -25)$.

6.

$$\begin{aligned}(-x + \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{3} - \sqrt{2}) &= -(x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ &= -((x - \sqrt{2})^2 - 3) \\ &= 3 - (x - \sqrt{2})^2\end{aligned}$$

Största värdet är 3, som antas för $x = \sqrt{2}$.

7.a) Inför en ny variabel t genom $t = x - 1$. Då blir

$$y = (t+1)^2 + 4(t+1) - 5 = t^2 + 6t - 1.$$

När x är nära 1 är t nära 0 och eftersom t^2 då är mycket mindre än t så är $y \approx 6t - 1$. Tangentens ekvation är alltså $y = 6t - 1 = 6(x-1) - 1 = 6x - 7$ varför $y'(1) = 6$.
b) Sätt nu $t = x - a$:

$$y = (t+a)^2 + 4(t+a) - 5 = t^2 + (2a+4)t + a^2 + 4a - 5.$$

När $x \approx a$ så är $t \approx 0$ och eftersom t^2 då är mycket mindre än t, så är $y \approx (2a+4)t + a^2 + 4a - 5$. Tangentens ekvation är alltså $y = (2a+4)(x-a) + a^2 + 4a - 5 = (2a+4)x - a^2 - 5$.

8. Vi kan skriva

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = (x+3-2)^2 \\ &= (x+3)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot (x+3) + (-2)^2 \\ &= (x+3)^2 - 4(x+3) + 4. \end{aligned}$$

När $x \approx -3$ så är $x+3 \approx 0$ och eftersom $(x+3)^3$ då är mycket mindre än $x+3$, så är $y \approx -4(x+3)+4$. Tangentens ekvation är därför $y = -4(x+3)+4 = -4x-8$.

9. Vi gör a) och b) i ett svep och börjar med att ”komplettera kuben”:

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 15x^2 + 48x - 14 = (x-5)^3 - 75x + 125 + 48x - 14 \\ &= (x-5)^3 - 27x + 111 = (x-5)^2 - 27(x-5) - 24 \end{aligned}$$

Sätter vi $t = x - 5$, $s = y + 24$ så blir detta $s = t^3 - 27t$. Inflexionspunkten i s,t-koordinater är $(0,0)$, vilket i x,y-koordinater är $(5,-24)$. När t är nära 0 så är t^3 mycket mindre än $-27t$, så att $s \approx -27t$. Tangentens ekvation i s,t-koordinater är därför $s = -27t$, vilket i x,y-koordinater blir $y + 24 = -27(x-5)$.

10. Vi börjar med att ”komplettera kuben”:

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 9x^2 + 11x + 18 = (x-3)^3 - 27x + 27 + 11x + 18 \\ &= (x-3)^3 - 16x + 45 = (x-3)^3 - 16(x-3) - 3 \end{aligned}$$

Sätt nu $x - 3 = t$, $y + 3 = s$; då blir $s = t^3 - 16t$. Inflexionspunkten i s,t-koordinater är $(0,0)$, vilket i x,y-koordinater är $(3,-3)$. När t är nära 0 så är t^3 mycket mindre än $-16t$, så då är $s \approx -16t$. Tangentens ekvation i s,t-koordinater är således $s = -16t$. I x,y-koordinater blir detta $y+3 = -16(x-3)$.

11.a) Sätt $t = x + 1$, dvs $x = t - 1$. Då blir

$$y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11 = (t-1)^3 - 12(t-1)^2 + 36(t-1) - 11 = t^3 - 15t^2 + 63t - 60.$$

När t är ”litet” (nära 0), så är $y \approx 63t - 60$ eftersom andra- och tredjegradstermerna är mycket mindre än de andra. Tangentens ekvation är således $y = 63t - 60 = 63(x+1) - 60$.
b) Sätt $t = x - a$, $x = t + a$:

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 12x^2 + 36x - 11 = (t+a)^3 - 12(t+a)^2 + 36(t+a) - 11 \\ &= t^3 + (3a-12)t^2 + (3a^2 - 24a + 36)t + (a^3 - 12a^2 + 36a - 11). \end{aligned}$$

Som i a) ser vi att tangentens ekvation är

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 - 24a + 36)t + (a^3 - 12a^2 + 36a - 11) \\ &= (3a^2 - 24a + 36)(x-a) + (a^3 - 12a^2 + 36a - 11). \end{aligned}$$

12. Sätter vi $t = v - 2$ så får vi $s = (v-2)^3 - 12(v-2) = v^3 - 6v^2 + 16$, så att $y = s + 5 = v^3 - 6v^2 + 21 = 21 + v^2(v-6)$. När v är tillräckligt nära 0, så är $v - 6 < 0$ och $v^2(v-6) < 0$. Alltså är då $y \leq 21$.

13. Vi vill göra en substitution $t = u + c$ och välja c så att förstagradstermen försvinner. Insättning ger

$$s = t^3 + at = (u+c)^3 + a(u+c) = u^3 + 3cu^2 + (3c^2 + a)u + (c^3 + ac).$$

Vi vill alltså välja c så att $3c^2 + a = 0$ eller $c^2 = -a/3$. Om $a < 0$ så är detta möjligt eftersom då $-a/3 > 0$.

14. Vi såg i Övning 9 att $s = t^3 - 27t$, där $s = y + 24$, $t = x - 5$. Sätt $t = u + c$:

$$s = (u+c)^3 - 27(u+c) = u^3 + 3cu^2 + (3c^2 - 27)u + (c^3 - 27c).$$

Vi vill att förstagradstermen ska vara 0, vilket ger villkoret $3c^2 - 27 = 0$, dvs $c = \pm 3$. Vi väljer $c = 3$, vilket ger $s = u^3 + 9u^2 - 54$. Sätter vi in $s = y + 24$ så får vi $y = u^3 + 9u^2 - 78 = -78 + u^2(u+9)$. När u är nära 0, så är $u^2(u+9) \geq 0$ och därför $y \geq -78$. Vi har $y = -78$ för $u = 0$, så detta är ett lokalt minimivärde. Motsvarande x-värde är $x = t + 5 = u + 3 + 5 = 8$. Minimipunkten är således $(8, -78)$ i x, y-koordinater. I t, s-koordinater är koordinaterna $(8-5, -78+24) = (3, -54)$. På grund av symmetrin i origo har maximipunkten t, s-koordinaterna $(-3, 54)$, vilket i x, y-systemet är $(-3+5, 54-24) = (2, 30)$. (Här är det feltryck i facit.)

15. Vi sätter in:

$$\begin{aligned} y &= (u+b)^3 + 6(u+b)^2 - 15(u+b) - 80 \\ &= u^3 + (3b+6)u^2 + (3b^2 + 12b - 15)u + (b^3 + 6b^2 - 15b - 80) \end{aligned}$$

För att förstagradstermen ska vara 0 måste $3b^2 + 12b - 15 = 0$, vilket ger $b = -5$ eller $b = 1$. Vi väljer $b = 1$ och får $y = u^3 + 9u^2 - 88 = -88 + u^2(u+9)$. När $u = 0$ är $y = -88$ och när u är nära 0 är $u^2(u+9) \geq 0$, varför $y \geq -88$ i närheten av 0. Alltså är -88 ett lokalt minimivärde. Motsvarande värde på x är $x = 0 + 1 = 1$, så minimipunkten är $(1, -88)$.

16.a)

$$
\begin{aligned}
y &= x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 5 = (t+3)^4 - 2(t+3)^3 + (t+3)^2 - (t+3) - 5 \\
&= t^4 + 10t^3 + 19t^2 + 59t + 28
\end{aligned}
$$

b) När t är när 0, så är $y \approx 59t + 28 = 59(x-3) + 28$. Tangentens ekvation är således $y = 59(x-3) + 28$.

Lösningar till övningarna i Kapitel 5 i Funktionslära

1. Låt $(a, 4^a)$ vara en punkt på kurvan $y = 4^x$. Låt (b, c^b) vara den punkt på kurvan $y = c^x$ som har samma y-koordinat som $(a, 4^a)$. Då är alltså $c^b = 4^a$. Men enligt uppgiften ska (b, c^b) ligga mitt emellan y-axeln och $(a, 4^a)$, vilket ger $b = a/2$. Alltså får vi $c^{a/2} = 4^a$, vilket ger $c = 16$.

2. Låt $(a, 4^a)$ vara en punkt på kurvan $y = 4^x$ och låt $(b, 2^b)$ vara den punkt på $y = 2^x$ som har samma y-koordinat, dvs $4^a = 2^b$. Eftersom $4 = 2^2$ så får vi $(2^2)^a = 2^{2a} = 2^b$, varför $b = 2a$. Punkten på $y = 2^x$ är således $(2a, 2^{2a}) = (2a, 4^a)$. Låt (d, c^d) vara den punkt på $y = c^x$ som ligger mitt emellan $(a, 4^a)$ och $(2a, 4^a)$. Då måste d ligga mitt emellan a och $2a$, dvs $d = 3a/2$. y-koordinaten $c^d = c^{3a/2}$ är lika med 4^a, så vi får $c^{3a/2} = 4^a$ och $c = 4^{2/3} = \sqrt[3]{16}$.

3.a)

$$\begin{aligned} a^b &= a^{(x_0+x_1)/2} = (a^{x_0+x_1})^{1/2} = (a^{x_0} \cdot a^{x_1})^{1/2} = (3 \cdot 192)^{1/2} \\ &= \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 64} = 3 \cdot 8 = 24 \end{aligned}$$

b) Eftersom de tre avstånden $c - x_0$, $d - c$ och $x_1 - d$ ska vara lika, så måste

$$c = x_0 + \frac{1}{3}(x_1 - x_0) = \frac{2x_0 + x_1}{3},\ d = x_0 + \frac{2}{3}(x_1 - x_0) = \frac{x_0 + 2x_1}{3}.$$

Vi får nu som i a) att

$$a^c = (a^{2x_0+x_1})^{1/3} = ((a^{x_0})^2 a^{x_1})^{1/3} = \sqrt[3]{3^2 \cdot 192} = 3 \cdot 4 = 12$$

och

$$a^d = (a^{x_0+2x_1})^{1/3} = (a^{x_0}(a^{x_1})^2)^{1/3} = \sqrt[3]{3 \cdot 192^2} = 48$$

4. Eftersom följden $x_1, x_2, \ldots$ är aritmetisk med differens d, så har vi $x_j = x_1 + (j-1)d$ för $j = 1, 2, \ldots$. Alltså är

$$y_j = a^{x_j} = a^{x_1+(j-1)d},$$

vilket ger

$$\frac{y_{j+1}}{y_j} = \frac{a^{x_1+jd}}{a^{x_1+(j-1)d}} = a^{x_1+jd-x_1-(j-1)d} = a^d.$$

Det följer att följden $y_1, y_2, \ldots$ är geometrisk med kvot $k = a^d$. Säg att kvoten är 4 för $d = d_1$, dvs $a^{d_1} = 4$. Låt d_2 vara det värde på d för vilket kvoten är 8, dvs $a^{d_2} = 8$; frågan i uppgiften går ut på att uttrycka d_2 i d_1. Men av $4 = 2^2$ och $8 = 2^3$ följer att $8 = 4^{3/2}$, så

$$a^{d_2} = (a^{d_1})^{3/2} = a^{3d_1/2}, \quad \text{varav} \quad d_2 = 3d_1/2.$$

5. Det blir möjligen lättare att skissa kurvan om man skriver $y = (\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{3})^x = 3 \cdot 3^{x/2}$. För att spegla grafen i linjen $y = 2$ kan man göra så här: Betrakta

punkten (a, b). Speglar man i en linje som är parallell med x-axeln, i vårt fall linjen $y = 2$, så ändras inte x-koordinaten, så spegelbilden har formen (a, c) för något tal c. Punkten (a, c) ligger lika långt från linjen $y = 2$ som (a, b), fast på andra sidan. Avståndet från (a, b) till $y = 2$ är $|b - 2|$ och avståndet från (a, c) till $y = 2$ är $|c - 2|$, så vi får $|b - 2| = |c - 2|$, dvs $b - 2 = \pm(c - 2)$. Plustecknet ger $c = b$, vilket är ointressant, men minustecknet ger $b - 2 = -(c - 2)$, varav $c = 4 - b$. Spegelbilden är således $(a, 4 - b)$, så spegelbilden av $y = (\sqrt{3})^{x+2}$ är $4 - y = (\sqrt{3})^{x+2}$, dvs $y = 4 - (\sqrt{3})^{x+2}$.

6. Sätt $y_j = 2 \cdot (\sqrt{3})^j - (\sqrt{2})^j$. Summan $S = y_0 + y_1 + \ldots + y_{10}$ består av två geometriska summor:

$$\begin{aligned}
S &= (2 \cdot (\sqrt{3})^0 - (\sqrt{2})^0) + (2 \cdot (\sqrt{3})^1 - (\sqrt{2})^1) + \ldots + (2 \cdot (\sqrt{3})^{10} - (\sqrt{2})^{10}) \\
&= 2((\sqrt{3})^0 + (\sqrt{3})^1 + \ldots + (\sqrt{3})^{10}) - ((\sqrt{2})^0 + (\sqrt{2})^1 + \ldots + (\sqrt{2})^{10}) \\
&= 2 \cdot \frac{(\sqrt{3})^{11} - 1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{(\sqrt{2})^{11} - 1}{\sqrt{2} - 1} \\
&= 2 \cdot \frac{3^5\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{2^5\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \\
&= 2 \cdot \frac{(243\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} - \frac{(32\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} \\
&= 243 \cdot 3 + 243\sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 - (32 \cdot 2 + 32\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1) \\
&= 665 + 242\sqrt{3} - 31\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

7. Kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned}
y &= 4^x - 5 \cdot 2^{x-1} + 1 = (2^x)^2 - \frac{5}{2} \cdot 2^x + 1 \\
&= \left(2^x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1 \\
&= \left(2^x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

Alltså är $y = 0$ om och endast om $2^x - 5/4 = \pm 3/4$, dvs $2^x = 2/4 = 1/2$ eller $2^x = 8/4 = 2$. Detta ger $x = -1$ eller $x = 1$. För att undersöka funktionsvärdena för stora negativa värden på x sätter vi $x = -t$, där $t > 0$. Då är $4^x = 4^{-t} = 1/4^t$ och $2^{x-1} = 1/2^{t+1}$. När t är stort (positivt), så är 4^t och 2^t också stora, så 4^x och 2^{x-1} är nära 0 (men positiva). Alltså är $y \approx 1$ för stora negativa x. När man skissar grafen har man nytta av observationen att det minsta värdet som y antar är $-9/16$, vilket är funktionsvärdet då $2^x = 5/4$ (som ger $x = \lg(5/4)/\lg 2$, där ”lg” betyder 10-logaritmer).

8.a) När man skissar en graf ska man alltid försöka ta reda på vad funktionen har för tecken för alla möjliga värden på x. Här är det enkelt: vi har $y < 0$ för $x < 0$ och $y > 0$ för $x > 0$. För $x = 0$ är förstås $y = 0$. Det går att bevisa att

$x2^x$ närmar sig 0 för stora negativa värden på x och att grafen har ett lokalt minimum för $x = -1/\ln 2$, där "ln" är naturliga logaritmer.
b) Exponenten $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, så $2^{x^2+2x} = \frac{1}{2}2^{(x+1)^2}$. Vi ser att y är stort (positivt) både då x är stort positivt och negativt. Eftersom $(x+1)^2$ har ett lokalt minimum för $x = -1$ så gäller detsamma om y.

9. Skriv $1/\sqrt{2^x} = (2^{-1/2})^x$ och $2^{-x} = ((2^{-1/2})^x)^2$; då är det lätt att kvadratkomplettera:

$$y = \left(\left(2^{-1/2}\right)^x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Nollställena till funktionen får vi alltså för $(2^{-1/2})^x = 1/2 = 2^{-1}$, dvs för $x = 2$. Eftersom en kvadrat (på ett reellt tal) alltid är ≥ 0, så är funktionens minsta värde 0, vilket antas just för $x = 2$. När x är stort och > 0, så är $\left(2^{-1/2}\right)^x = 1/(\sqrt{2})^x$ litet, så $y \approx 1/4$. När x är stort men negativt så är också $1/(\sqrt{2})^x$ stort.

10.a) Grafen är instängd mellan de vågräta linjerna $y = 1$ och $y = 2$ (värdena för $x = 0$ respektive $x = 1$). Alltså ligger arean mellan areorna av två rektanglar med bas 1, den ena med höjd 1 och den andra med höjd 2, dvs $1 \leq A \leq 2$.
b) Funktionsvärdet för $x = 1/2$ är $2^{1/2} = \sqrt{2}$. Drag sträckorna $y = \sqrt{2}$ för $0 \leq x \leq 1/2$ och $y = 1$ för $1/2 \leq x \leq 1$. Arean under grafen för $0 \leq x \leq 1/2$ är mindre än arean av rektangeln med bas $1/2$ och höjd $\sqrt{2}$, dvs $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Arean under grafen för $1/2 \leq x \leq 1$ är på samma sätt mindre än $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Alltså är $A < \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$.
c) Varje rektangel har bas $1/10$. Höjden av den första är $y(1/10) = 2^{1/10}$, av den andra $2^{2/10}$ osv. Den sammanlagda arean av alla rektanglarna är

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}\left(2^{1/10} + 2^{2/10} + \ldots + 2^{10/10}\right) &= \frac{1}{10} \cdot 2^{1/10} \cdot \frac{(2^{1/10})^{10} - 1}{2^{1/10} - 1} \\ &= \frac{1}{10(1 - 2^{-1/10})}.\end{aligned}$$

d,e) Om man tar n linjer istället för 10 så blir resultatet

$$A < \frac{1}{n(1 - 2^{-1/n})}.$$

11. Eftersom $3^{1/n} > 1 + 1/n$ så gäller även $3^{m/n} = (3^{1/n})^m > (1 + 1/n)^m$. Men enligt binomialsatsen är

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1^m + \binom{m}{1} \cdot 1^{m-1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{m}{2} \cdot 1^{m-2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n}.$$

Alla termer i högerledet är positiva, så det följer att

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m > 1^m + \binom{m}{1} \cdot 1^{m-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{m}{n}.$$

12. Alla termer i summan är positiva, så

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2\,\frac{17}{24}.$$

Att detta är $> 2,7$ följer av

$$2\,\frac{17}{24} > 2,7 \Leftrightarrow \frac{17}{24} > 0,7 \Leftrightarrow 17 \cdot 10 > 7 \cdot 24 \Leftrightarrow 170 > 168.$$

13.

$$\begin{aligned} e &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{4! \cdot 5} + \frac{1}{4! \cdot 5^2} + \ldots \\ &= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1 - 1/5} = 2\,\frac{69}{96}. \end{aligned}$$

14. Den vänstra olikheten följer av formeln (3) på sidan 30 i häftet eftersom a_n är summan av bara de n första termerna och alla termer är positiva. Den högra olikheten följer på samma sätt som olikheten i övning 13:

$$\begin{aligned} e &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots \\ &= a_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots \\ &< a_n + \frac{1}{n!(n+1)} + \frac{1}{n!(n+1)^2} + \ldots \\ &= a_n + \frac{1}{n!(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - 1/(n+1)} = a_n + \frac{1}{n! \cdot n}. \end{aligned}$$

Lösningar till övningarna i Kapitel 6 i Funktionslära

1. I stället för att visa att varje *lodrät* linje skär spegelbilden till $y = 2^x + x + 1$ i bara en enda punkt kan vi visa att varje *vågrät* linje skär grafen till $y = 2^x+x+1$ i bara en enda punkt. Men detta beror på att funktionen $y = 2^x+x+1$ är strängt växande, vilket i sin tur beror på att funktionerna $y = 2^x$ och $y = x + 1$ är det.

2. Funktionen $y = 2^x + 3^x$ är en summa av två strängt växande funktioner och är således strängt växande själv. Alltså är den inverterbar. Funktionen $y = 2^x + (1/2)^x$ antar samma värde för x och $-x$ och är därför inte inverterbar. Funktionen $y = 1/x$ är inte vare sig strängt växande eller strängt avtagande, men är ändå inverterbar; den är till och med sin egen invers. För $y = f(x) = x^4 - 3x^3 + 7$ gäller att $f(0) = f(3)$, så den är inte inverterbar (och därmed inte vare sig strängt växande eller strängt avtagande). Funktionen $y = x^3 - x$ antar samma värde för $x = 0$ och $x = 1$ och är därmed inte inverterbar. Vi har $y = x^3 - 6x^2 - 3x - 10 = (x-2)^3 - 15x - 2 = (x-2)^3 - 15(x-2) - 32$, så om vi sätter $s = y+32$, $t = x-2$ har vi $s = t^3 - 15t$. Den här funktionen antar värdet 0 för $t = 0$ och för $t = \pm\sqrt{15}$ och är därför inte inverterbar. Detsamma gäller då den ursprungliga funktionen. Funktionen $y = 1/x^2$ antar samma värde för x och $-x$ och är inte inverterbar.

3. Sätt $y = 3x+2$. För att bestämma inversen ska vi lösa ut y ur $x = 3y+2$. Detta ger $y = (x - 2)/3$. Att vi faktiskt kan bestämma inversen innebär förstås att inversen existerar. Annars är det lätt att använda definitionen på inverterbarhet: $f(x_1) = f(x_2)$ ger $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$, som omedelbart ger $x_1 = x_2$.

4. Inversen är $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$, som man får genom att lösa ut y ur $x = y^3+1$.

5. För att visa att f är inverterbar försöker vi lösa ut x ur sambandet $y = (x - 2)/(x - 3)$. Detta ger $x = (3y - 2)/(y - 1)$, så inversen är $f^{-1}(x) = (3x-2)/(x-1)$. Den är definierad för alla $x \neq 1$. För att rita grafen till f kan man göra omskrivningen

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{x-3+1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}.$$

Detta visar att grafen ligger nära linjen $y = 1$ då x är stort positivt eller negativt. Den ligger lite över för positiva x och lite under för negativa x. Funktionsvärdena är stora och negativa då x är nära 3 men < 3. De är stora och positiva då $x > 3$ är nära 3.

6. I stället för att bestämma skärningspunkten mellan $y = f^{-1}(x)$ och $y = (x+2)/4$ bestämmer vi skärningen mellan $y = f(x)$ och inversen till $y = (x+2)/4$, vilken är $y = 4x - 2$. Vi måste alltså lösa ekvationen $x^3 + x = 4x - 2$ eller $x^3 - 3x + 2 = 0$. Metoden med gissning av heltalsrötter fungerar och rötterna visar sig vara 1 och -2 (den förra är dubbel). Skärnngspunkterna mellan $y = 2^x + x + 1$ och $y = 4x - 2$ är därför $(1, 2)$ och $(-2, -10)$. Skärningspunkterna mellan spegelbilderna av graferna är då $(2, 1)$ och $(-10, -2)$.

7. Vi löser ut x ur sambandet $y = (2 + ax)/(x - 3)$: $x = (2 + 3y)/(y - a)$. För att funktionen ska vara sin egen invers måste vi tydligen ha $a = 3$.

8. Sätt $\log_2 3^8 = a$; då gäller enligt definitionen av 2-logaritmer att $2^a = 3^8$. Vi måste visa att talet $8 \log_2 3$ har samma egenskap. Detta följer av

$$2^{8 \log_2 3} = (2^{\log_2 3})^8 = 3^8.$$

9. Se uppgift 13!

11. Detta följer av att $c^0 = 1$ för alla c.

12. Av $27 = 3^3$ följer att $\log_3 27 = 3$. Av $5\sqrt{5} = 5 \cdot 5^{1/2} = 5^{3/2}$ följer att $\log_5 5\sqrt{5} = 3/2$. Av $49/\sqrt[3]{7} = 7^2/7^{1/3} = 7^{5/3}$ följer att $\log_7 49/\sqrt[3]{7} = 5/3$.

13.a) Högerledet $\log_c x_1 x_2$ har egenskapen att $c^{\log_c x_1 x_2} = x_1 x_2$ enligt definitionen av c-logaritmer. Vi måste visa att vänsterledet har samma egenskap. Detta följer av en liten räkning med potenser:

$$c^{\log_c x_1 + \log_c x_2} = c^{\log_c x_1} \cdot c^{\log_c x_2} = x_1 x_2$$

enligt definitionen av $\log_c x_1$ och $\log_c x_2$.
b)

$$\log_c x_2 + \log_c \frac{x_1}{x_2} = \log_c \left(x_2 \cdot \frac{x_1}{x_2} \right) = \log_c x_1$$

c) Vänsterledet har egenskapen att $c^{\log_c x^s} = x^s$ och vi måste visa att även högerledet har denna egenskap. Detta följer så här:

$$c^{s \log_c x} = (c^{\log_c x})^s = x^s.$$

14. Att $\log_4 x = 9$ betyder ju att $x = 4^9 = 2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$, varför $\log_8 x = 6$. Alltså är

$$\log_8 \frac{1}{2} x^2 = \log_8 \frac{1}{2} + 2 \log_8 x = -\log_8 8^{1/3} + 12 = -\frac{1}{3} + 12 = \frac{35}{3}.$$

(Lägg märke till att $2 = 8^{1/3}$ eftersom $8 = 2^3$.)

15. Vi har

$$4^{\log_2 \sqrt{x}} = (2^2)^{\log_2 \sqrt{x}} = (2^{\log_2 \sqrt{x}})^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

och $4^{\log_4 (1/x^2)} = 1/x^2$, så ekvationen kan skrivas $x \cdot 1/x^2 = 4^{-2} = 1/16$. Detta ger $x = 16$.

16. Vi har $5 = 2^{\log_2 5}$, så täljaren är lika med

$$5^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_2 5} = 3^{\log_2 5}.$$

Bråket är tydligen lika med 1.

17. Sambandet följer om man tar a-logaritmen av båda leden i $b^{\log_b c} = c$.

18. Tag $b = 7$, $c = 82$ och exempelvis $a = 10$; då får vi $\log_7 82 = \log_{10} 82 / \log_{10} 7$.

19. Sätt $t = \log_3 x$; då blir ekvationen $t^2 - 5t + 6 = 0$ (eftersom $\log_3 9 = 2$). Rötterna till denna är $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, så rötterna till den ursprungliga ekvationen är $x_1 = 3^2 = 9$, $x_2 = 3^3 = 27$.

20. Vi börjar med att visa att f är inverterbar genom att använda definitionen av inverterbarhet. Antag alltså att $f(x_1) = f(x_2)$, dvs att $2^{x_1} + 2^{-x_1} = 2^{x_2} + 2^{-x_2}$. Sätt $t_1 = 2^{x_1}$, $t_2 = 2^{x_2}$, så att $t_1 + 1/t_1 = t_2 + 1/t_2$. Multiplicerar vi med $t_1 t_2$ så får vi $t_1^2 t_2 + t_2 = t_1 t_2^2 + t_1$ eller $t_1^2 t_2 - t_1 t_2^2 + t_2 - t_1 = 0$. Detta kan skrivas $(t_2 - t_1)(1 - t_1 t_2) = 0$. Alltså måste $t_1 = t_2$ eller $t_1 t_2 = 1$. Eftersom x_1 och $x_2 \geq 0$ så är t_1 och $t_2 \geq 1$, så $t_1 t_2 = 1$ bara om $t_1 = t_2 = 1$. Alltså är $t_1 = t_2$, varför $x_1 = x_2$ och f är inverterbar.

Vi bestämmer nu inversen. Sätt $t = 2^x$; då är $(1/2)^x = 1/t$, så vi ska lösa ut t ur sambandet $y = t + 1/t$. Detta ger andragradsekvationen $t^2 - yt + 1 = 0$ med rötterna

$$t = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}.$$

Eftersom $t = 2^x$ och $x \geq 0$, så är $t \geq 1/t$ och då måste

$$t = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}.$$

Inversen är således

$$f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} \right).$$

För att detta ska vara definierat måste uttrycket under rottecknet vara ≥ 0, vilket betyder att $x \geq 2$. Formeln ger $f^{-1}(10/3) = \log_2 3$.

21. Den allmänna termen har utseendet $\ln \sqrt[2^n]{2} = \ln 2^{1/2^n} = \frac{\ln 2}{2^n}$. Alltså är

$$\ln 2 + \ln \sqrt{2} + \ldots = \ln 2 \cdot (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots) = \frac{\ln 2}{1 - 1/2} = 2 \ln 2.$$

22. Om vi sätter $a = \log_6 18$ och $b = \log_6 2$ så är uttrycket lika med

$$a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$

Vi har $a + b = \log_6(18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2$, så uttrycket är lika med $2^3 = 8$.