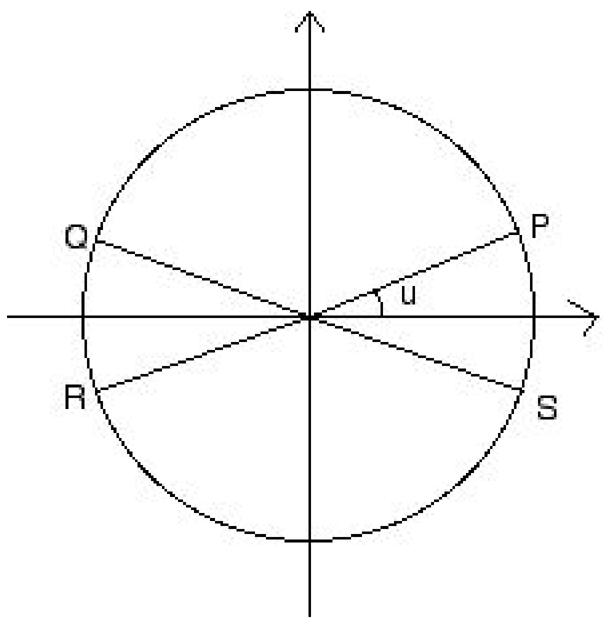
Några trigonometriska samband

Torbjörn Tambour

1 april 2008

Här följer en härledning av några trigonometriska samband, vilket också utgör lösningar på några av uppgifterna i kompendiet. Låt u vara en vinkel och betrakta enhetscirkeln:



Här är P den punkt på enhetscirkeln som motsvarar vinkeln u, dvs P är skärningspunkten mellan ett av vinkelbenen och cirkeln (det andra vinkelbenet ligger längs positiva x-axeln). De andra markerade punkterna är

$Q =$ spegelbilden av P i y-axeln

$R =$ spegelbilden av P i origo

$S =$ spegelbilden av P i x-axeln

Enligt definitionen av de trigonometriska funktionerna så har vi

$$P = (\cos u, \sin u).$$

Att spegla i y-axeln är detsamma som att byta tecken på x-koordinaten och behålla y-koordinaten, så

$$Q = (-\cos u, \sin u).$$

Att spegla i origo är detsamma som att byta tecken på båda koordinaterna, så

$$R = (-\cos u, -\sin u).$$

Att spegla i x-axeln är detsamma som att byta tecken på y-koordinaten och behålla x-koordinaten, så

$$S = (\cos u, -\sin u).$$

Men vi kan uttrycka koordinaterna för Q, R och S på annat sätt också genom att ta reda på vilka vinklar de motsvarar. I figuren syns att

$$\begin{array}{ccc} Q & \text{motsvarar} & 180^\circ - u \\ R & \text{motsvarar} & 180^\circ + u \\ S & \text{motsvarar} & -u \end{array}$$

Återigen enligt definitionerna av de trigonometriska funktionerna så ger detta

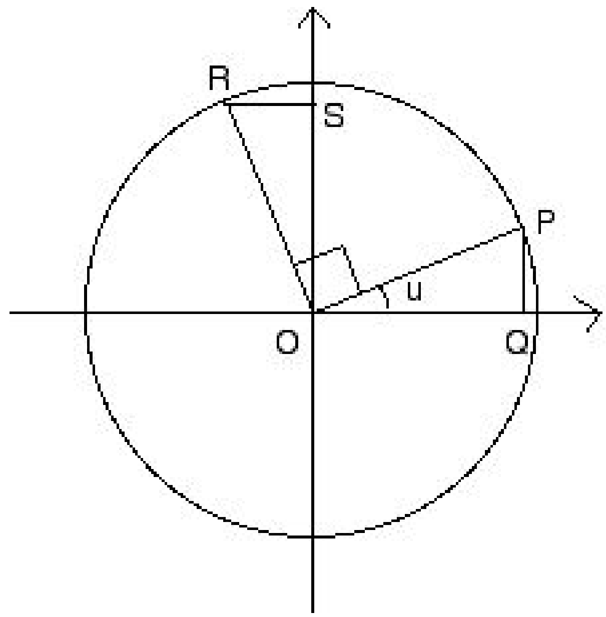
$$\begin{array}{rcl} Q & = & (\cos(180^\circ - u), \sin(180^\circ - u)) \\ R & = & (\cos(180^\circ + u), \sin(180^\circ + u)) \\ S & = & (\cos(-u), \sin(-u)) \end{array}$$

Jämför vi med uttrycken ovan så får vi sambanden

$$\begin{array}{lll} \cos(180^\circ - u) = -\cos u & \cos(180^\circ + u) = -\cos u & \cos(-u) = \cos u \\ \sin(180^\circ - u) = \sin u & \sin(180^\circ + u) = -\sin u & \sin(-u) = -\sin u \end{array}$$

Vi har härlett de här formlerna under förutsättning att u är spetsig, men man kan ganska lätt övertyga sig om att de gäller för alla vinklar.

Vi ska härleda ytterligare ett par samband och tar en ny titt i enhetscirkeln.



Vinkeln u och punkten P är som förut och vi antar att u är spetsig. Punkten Q är fotpunkt för normalen från P mot x-axeln, så $\triangle OQP$ är rätvinklig vid Q (O är origo). Enligt definitionen av de trigonometriska funktionerna så är

$$\cos u = |OQ|, \; \sin u = |PQ|.$$

Triangeln $\triangle OSR$ har vi fått genom att vrida $\triangle OQP$ ett kvarts varv (90 grader) i positiv led (det matematiska uttrycket för moturs eller motsols). Punkten R motsvarar därför vinkeln $90^\circ + u$, så återigen enligt definitionen gäller

$$R = (\cos(90^\circ + u), \sin(90^\circ + u)).$$

Men koordinaterna för R kan vi också uttrycka som

$$R = (-|RS|, |OS|)$$

(lägg märke till att längden $|RS|$ är ett positivt tal, medan R:s x-koordinat är negativ). Enligt konstruktionen av $\triangle OSR$ gäller emellertid

$$|OS| = |OQ|, \; |RS| = |PQ|,$$

vilket å andra sidan ger

$$R = (-|PQ|, |OQ|) = (-\sin u, \cos u).$$

Jämför vi de två uttrycken för R så får vi sambanden

$$\cos(90^\circ + u) = -\sin u, \; \sin(90^\circ + u) = \cos u.$$

Vi har härlett dessa under förutsättning att u är spetsig, men genom att undersöka de andra fallen kan man förvissa sig om att de gäller för alla vinklar.

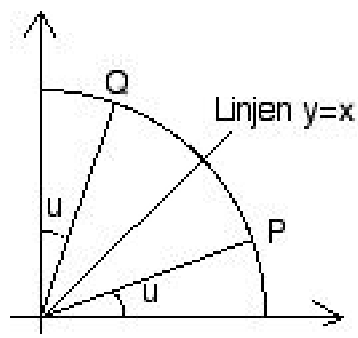
Låt oss sätta $v = -u$, dvs $u = -v$. Då får vi

$$\cos(90^\circ - v) = -\sin(-v),\ \sin(90^\circ - v) = \cos(-v).$$

Men $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$, så detta ger

$$\cos(90^\circ - v) = -(-\sin v) = \sin v,\ \sin(90^\circ - v) = \cos v.$$

De här två formlerna är mycket användbara när man ska översätta mellan sinus och cosinus. De går att härleda på ett annat och mer direkt sätt också, vilket är en nyttig övning. Vi tar ännu en titt i enhetscirkeln och nu är punkten Q spegelbilden av P i linjen $y = x$.



Att spegla i linjen $y = x$ är detsamma som att skifta x- och y-koordinaterna, dvs spegelbilden av punkten (a, b) är (b, a) (tänk igenom varför det är så). Alltså är

$$Q = (\sin u, \cos u).$$

Men Q motsvarar vinkeln $90^\circ - u$, så vi har även

$$Q = (\cos(90^\circ - u), \sin(90^\circ - u)).$$

Jämför vi de två uttrycken för Q så får vi

$$\cos(90^\circ - u) = \sin u,\ \sin(90^\circ - u) = \cos u.$$