

Exponential- och logaritmfunktioner

XANTCHA

(Svar av Åsa Ericsson)

2009

1. Lös ekvationen

$$2^x = \frac{1}{8}. \quad 2^x = \frac{1}{2^3}, \quad 2^x = 2^{-3}, \quad \underline{x = -3}$$

2. Lös ekvationen

$$4^x = 16 \cdot 2^x. \quad 2^{2x} = 2^4 \cdot 2^x, \quad 2^x = 2^4, \quad \underline{x = 4}$$

3. Lös ekvationen

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8. \quad \frac{1}{2^{2x}} = 2^3, \quad 2^{-2x} = 2^3, \quad \underline{x = -\frac{3}{2}}$$

4. Förenkla

$$\sqrt[8]{\sqrt[7]{a^{112}}} = ((a^{2 \cdot 7 \cdot 8})^{1/7})^{1/8} = (a^{2 \cdot 8})^{1/8} = \underline{a^2}$$

5. Skriv

$$\frac{8^5}{4^3} = \frac{(2^3)^5}{(2^2)^3} = \frac{2^{15}}{2^6} = \underline{2^9}$$

som en potens av 2.

6. Förenkla

$$\sqrt{\frac{2a^3}{3b^4}} \left(\frac{24}{a\sqrt{b^6}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2} a^{3/2}}{\sqrt{3} b^2} \cdot \frac{a^{1/2} b^{3/2}}{\sqrt{24}} = \frac{a^2}{6\sqrt{b}}$$

7. Bestäm $2^{-\frac{x}{2}}$ då man vet att $2^x = \frac{1}{9}$. $2^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}} = \underline{\frac{1}{3}}$

8. Lös ekvationen

$$2^{x^2} = (2^x)^2. \quad 2^{x^2} = 2^{2x}, \quad x^2 = 2x, \quad \underline{x=0 \text{ eller } x=2.}$$

9. Rita grafen till funktionerna

(a) $y = 2^x$.

(b) $y = 3^x$.

(c) $y = 2^{x+1}$.

(d) $y = 2^{x-1}$.

(e) $y = 2^{2x}$.

(f) $y = 3^x + 3^{x+1}$.

(Kan kontrolleras t.ex. genom att söka på 2^x o.s.v. i Google.)

10. Vad är $\log_7 7^{13}$? Vad är $3^{\log_3 666}$? 13 resp. 666

11. Förenkla

(a) $\lg \frac{7}{4} + \lg \frac{8}{7} = \lg \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7} \right) = \lg \frac{1}{2} = -\lg 2$

(b) $\frac{1}{2} \lg 100 - 2 \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \ln 2 = 1 - 2 \ln 2$ (eller $1 - \ln 4$)

(c) $\lg 36 - 3 \lg 6 = \lg 36 - \lg 6^3 = \lg \frac{36}{6^3} = \lg \frac{1}{6} = -\lg 6$

(d) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

(e) $\log_2 11 + \log_2 \frac{1}{11} = \log_2 \left(11 \cdot \frac{1}{11} \right) = \log_2 1 = 0$

12. Förenkla

(a) $\frac{1}{x^2} + \ln x^3 = \frac{1}{x^2} + 3 \ln x$ (inte uppenbart vilket som är enklast)

(b) $\ln e^{2x} = 2x$

(c) $e^{\ln t} = t$

(d) $\ln e^x + \ln e^{-x} = x - x = 0$

13. Är $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$? Nej!

14. Är $\ln(a+b) - \ln a - \ln b = \ln \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$? Ja, ty $\ln(a+b) - \ln a - \ln b = \ln \frac{a+b}{a \cdot b} =$

15. Hur skall exponenten y se ut för att $3^x = e^y$? $y = \ln 3^x = x \ln 3 = \ln \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)$

16. Lös ekvationerna

(a) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$. $\ln(x(x-1)) = \ln 6$, $x^2 - x = 6$, $x=3$ eller $x=-2$

(b) $\ln x^2 = \ln x^3$. $x^2 = x^3$ ($x \neq 0$), $x=1$

(c) $2 \ln(x-4) = \ln x + \ln 2$. $(x-4)^2 = 2x$, $x^2 - 10x + 16 = 0$, $x=2$ eller $x=8$

(d) $\ln x + \ln(x-2) = 2$. $x(x-2) = e^2$, $x = 1 \pm \sqrt{e^2 + 1}$

(e) $\ln(3^x + 3^{x+1}) = 1$. $3^x + 3^{x+1} = e$, $3^x(1+3) = e$, $3^x = \frac{e}{4}$, $x = \log_3 \left(\frac{e}{4} \right)$

17. Rita kurvorna

(a) $y = \lg x$.

(b) $y = \lg |x|$.

(c) $y = |\lg x|$.

(d) $y = \lg(x+1)$.

(e) $y = \lg(x-1)$.

(f) $y = \lg 2x$.

(g) $y = \lg(2+3x)$.

(h) $y = \lg \frac{1}{x}$.