

Vektorgeometri och funktionslära

XANTCHA

2009

Del A: Beräkningsdel

Räkningar behöver inte redovisas. Samtliga uppgifter måste vara korrekta om tentamen skall godkännas (möjligen kan något slarvfel tolereras), så *kontrollera svaren noga*.

1. Beräkna sinus, cosinus och tangens för vinklarna 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 120° , 135° , 150° , 180° , 210° , 225° , 240° , 270° , 300° , 315° , 330° , och 360° .
2. Låt $u = (2, 3)$ och $v = (-1, -3)$. Beräkna $u + v$, $u - v$ och $-v$. Rita ut vektorerna i en figur.
3. Vilken punkt ligger mitt emellan $(\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$ och $(-\sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$?
4. Beräkna längden av vektorn $(1, 2, 3)$. Beräkna avståndet mellan punkterna $(-1, -1, -1)$ och $(1, 1, 0)$.
5. Beräkna skalärprodukten $(2, 1, 3) \cdot (-1, -4, -2)$.
6. Är vektorerna $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ och $(2, 1, 0)$ parallella?
7. Är vektorerna $(4, 5, 6)$ och $(\frac{1}{2}, 2, -2)$ vinkelräta mot varandra?
8. Ange en riktningsvektor till linjen

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ z = -2t \end{cases}$$

samt tre punkter som ligger på den.

9. Skriv ned en ekvation för linjen genom punkten $(4, -1, 7)$ med riktningsvektor $(-1, -2, -1)$. (Skriv också ned en helt annan ekvation för denna linje.) Ligger $(0, -9, -4)$ på linjen?
10. Ange en normalvektor till planet $-x - y = 7$, samt tre punkter som ligger i det.

11. Skriv ned ekvationen för planet genom punkten $(1, 2, 3)$ med normalvektor $(4, 5, 6)$.
12. Skriv ned ekvationen för cirkeln med medelpunkt $(1, -1)$ och radie $\frac{1}{2}$.
13. Beräkna
 - (a) $(1 + i)(3 - 4i)$.
 - (b) $\frac{3 - 4i}{1 + i}$.
 - (c) $\overline{-7}$.
 - (d) $|3 - 2i|$.
 - (e) $\arg(1 - i)$.
14. Bestäm den polära formen av
 - (a) $i\sqrt{3} - 1$.
 - (b) $-1 + i$.
 - (c) $\sqrt{3} + 3i$.

Rita talen i komplexa talplanet.
15. Bestäm den rektangulära formen av det tal, vars absolutbelopp och argument är
 - (a) $\sqrt{2}$ respektive $\frac{9\pi}{4}$.
 - (b) 1 respektive 2π .
 - (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ respektive $-\frac{\pi}{4}$.

Rita talen i komplexa talplanet.
16. Skriv ned de första sex raderna av Pascals triangel.
17. Beräkna binomialkoefficienten $\binom{20}{4}$. Vad räknar denna (vilken fråga har denna som svar)?
18. Övningsbladet om exponential- och logaritmfunktioner.

Del B: Problemdel

Lösningarna skall vara klara, tydliga och väl motiverade. Det sökta svaret till en uppgift skall klart framgå. En lösning med bara formler och inga förklaringar kan aldrig ge mer än halv poäng.

1. Låt A , B och C vara sidornas mittpunkter i triangeln PQR . Låt O vara origo. Visa att

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

2. Låt T beteckna tyngdpunkten i triangeln PQR . Visa att

$$\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{TR} = 0.$$

3. En triangel i rummet har hörn i punkterna $(1, 0, 2)$, $(0, -1, 1)$ och $(2, 1, 2)$. Bestäm triangelns sidlängder och vinklar. (Gör detta både med Cosinus-satsen och skalärprodukt!)

4. Två vektorer u och v spänner upp en parallelogram.

(a) Uttryck diagonalerna i parallelogrammen med hjälp av u och v .

(b) Visa att

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

5. Bestäm alla vektorer av längden 1 som är vinkelräta mot de båda vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(2, 2, 2)$.

6. Låt $OPQR$ vara en regelbunden tetraeder med kantlängden 1. Bestäm skalärprodukten

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}.$$

7. Låt L_1 vara den räta linjen $(x, y, z) = (2, 3, 0) + t(-1, 1, -2)$. Ange en ekvation för den räta linje L_2 som är parallell med L_1 och går genom punkten $(1, 0, 3)$.

8. Skär linjerna

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

varandra? Är de parallella?

9. Undersök om linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + 15t \\ y = -4 - 21t \\ z = 5 + 33t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 - 65t \\ y = -11 + 91t \\ z = 16 - 143t \end{cases}$$

skär varandra.

10. Ange en ekvation för planet genom punkterna $(2, 3, 0)$, $(1, 5, 2)$ och $(-1, 4, 3)$.

11. Ligger de fyra punkterna $(-1, -1, 0)$, $(0, 4, 1)$, $(1, 0, -1)$ och $(1, -3, -2)$ i samma plan?

12. Avgör om följande par av plan skär varandra och ange i förekommande fall en ekvation för skärningslinjen:

(a)

$$\begin{aligned}x - y - z &= 1 \\x - 5y + z &= -3\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x - 3z &= 1 \\x + y + 2z &= 0.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}2x - y + z &= 3 \\6x - 3y + 3z &= 2\end{aligned}$$

13. Bestäm vinkeln mellan planet $x + 2y - z = 0$ och linjen $(x, y, z) = (3, 5, -1) + t(1, 1, 0)$.
14. Visa att en linje med riktningsvektorn (p, q, r) är parallell med planet $Ax + By + Cz + D = 0$ om och endast om

$$Ap + Bq + Cr = 0.$$

15. Beräkna

$$\left| \frac{(1 + 2i)(7 + \sqrt{3}i)^2}{(5 + i)^2} \right|.$$

16. Lös ekvationen

$$z + 2\bar{z} = 2 - i.$$

17. Rita i det komplexa talplanet de z , som uppfyller $|z + 2| = 1$.

18. Argumentet av z är $\pi/3$ och argumentet av w är $\pi/4$. Bestäm argumentet av zw och z/w . Kan man säga vad $\arg(z + w)$ eller $\arg(z - w)$ är?

19. Argumentet av z är $\pi/3$. Ange ett argument till z^{2000} .

20. Beräkna $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$.

21. Lös ekvationen $z^5 = 4i$.

22. Lös ekvationen $(z - i)^4 - 1 = 0$.

23. Beräkna följande geometriska summor:

(a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$.

(b) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128}$.

(c) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^9$.

24. Konvergerar följande geometriska serier? Beräkna summan i förekommande fall.

(a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$

(b) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

(c) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

25. Utveckla $(3 - 2x)^5$.

26. Vad är koefficienten för x^3 i polynomet $(3 - x)^8$?

27. Bestäm den konstanta termen i $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{15}$?

28. Vilken är högstgradstermen i $(x^3 - 2)^{16} - (x^4 + 3)^{12}$?

29. Rita följande kurvor i samma koordinatsystem, så att det tydligt framgår vilken som är bredast respektive smalast, och vilka punkter som utgör vertices.

$$y = x^2 - 10x + 1, \quad y = -2x^2 + 8x, \quad y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1.$$

Var skär kurvorna axlarna? (Derivata får inte användas.)

30. För vilket $0 \leq x \leq 2$ är uttrycket

$$f(x) = (\sqrt{3} - x)(\sqrt{2} - x)$$

maximalt respektive minimalt? Vilket är det största respektive minsta värdet?

31. Skissera tredjegradskurvorna

$$y = x^3 - 3x^2 + 7x - 1, \quad y = 2x^3 - 6x^2, \quad y = x^3 - 12x^2 + 48x.$$

Var inträffar inflexionspunkterna?

32. Betrakta de två kurvorna $y = 2^x$ och $y = 3^x$.

(a) Bestäm den kurva som ligger mitt emellan dem räknat *vertikalt*.

(b) Bestäm den kurva som ligger mitt emellan dem räknat *horisontellt*.

33. Vilken kurva erhålles, då $y = e^x$ förskjutes ett steg åt höger och ett steg uppåt?

34. Visa att kurvorna $y = \lg(x + 1)$ och $y = \lg 2x$ är kongruenta, det vill säga har samma form (det är alltså "samma" kurva, bara parallellförflyttad). Hur ligger de i förhållande till varandra?

35. Bestäm eventuella inverser till funktionerna

- (a) $f(x) = 3x + 4$.
- (b) $f(x) = |x|$.
- (c) $f(x) = \frac{1}{x+2}, x \geq -2$.
- (d) $f(x) = x^2 + 4x + 5, x \geq -2$.

Svar till Problemdelen

- 3. Sidlängderna är $3, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ och vinklarna $\arccos -\sqrt{\frac{2}{3}}, \arccos \frac{5}{3\sqrt{3}}, \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
- 4. (a) $u + v$ och $u - v$ (eller $v - u$).
(b) —
- 5. $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.
- 6. $\frac{1}{2}$.
- 7. Exempelvis $(x, y, z) = (1, 0, 3) + t(-1, 1, -2)$.
- 8. Linjerna skär inte varandra och är inte parallella.
- 9. Linjerna sammanfaller.
- 10. $4x - 3y + 5z = -1$.
- 11. Ja.
- 12. (a) $(x, y, z) = (2, 1, 0) + (3, 1, 2)t$.
(b) $(x, y, z) = (1, -1, 0) + (3, -5, 1)t$.
(c) Saknar gemensamma punkter.
- 13. 60° .
- 15. $2\sqrt{5}$.
- 16. $z = \frac{2}{3} + i$.
- 17. Cirkeln med radien 1 och centrum -2 .
- 18. $\arg zw = \frac{7\pi}{12}, \arg z/w = \frac{1}{12}$. Nej.
- 19. $\frac{2\pi}{3}$.
- 20. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- 21. $\sqrt[5]{4}(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ), \sqrt[5]{4}(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ), \sqrt[5]{4}(\cos 162^\circ + i \sin 162^\circ),$
 $\sqrt[5]{4}(\cos 234^\circ + i \sin 234^\circ), \sqrt[5]{4}(\cos 306^\circ + i \sin 306^\circ)$.
- 22. $z_1 = 0, z_2 = 2i, z_{3,4} = i \pm 1$.

23. (a) 63.
(b) $\frac{511}{128}$.
(c) $\frac{1-x^{10}}{1+x}$.
24. (a) Divergerar.
(b) 4.
(c) Konvergerar när $|x| < 1$, mot summan $\frac{1}{1+x}$.
25. $243 - 810x + 1080x^2 - 720x^3 + 240x^4 - 32x^5$.
26. -13608 .
27. 5005.
28. $-32x^{45}$.