Vektorgeometri och funktionslära
Lösningsförslag till tentamen 150117

Del A: Korta frågor

1. $(2,a)\cdot(1,3) = 2\cdot 1 + a\cdot 3 = 2+3a$

   Detta blir 0 om $\underline{\underline{a=-\frac{2}{3}}}$

2. $\underline{\underline{\bar{v}=(-1,2,1)}}$ (koefficienterna för t)

3. $|5-2i| = \sqrt{(5-2i)(5+2i)} = \sqrt{25+4} = \underline{\underline{\sqrt{29}}}$

4. Pascals triangel:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

(sökt rad) $\rightarrow$ $\boxed{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1}$

$=\binom{3}{0} \quad =\binom{3}{1} \quad =\binom{3}{2} \quad =\binom{3}{3}$

5. $\dfrac{\sqrt[3]{t^6}}{t^{-1}} = t^{6\cdot\frac{1}{3}}\cdot t^1 = t^2\cdot t^1 = \underline{\underline{t^3}}$

6. $2\ln 3 + \ln 2 - \ln 6 = \ln\left(\dfrac{3^2\cdot 2}{6}\right) = \underline{\underline{\ln 3}}$

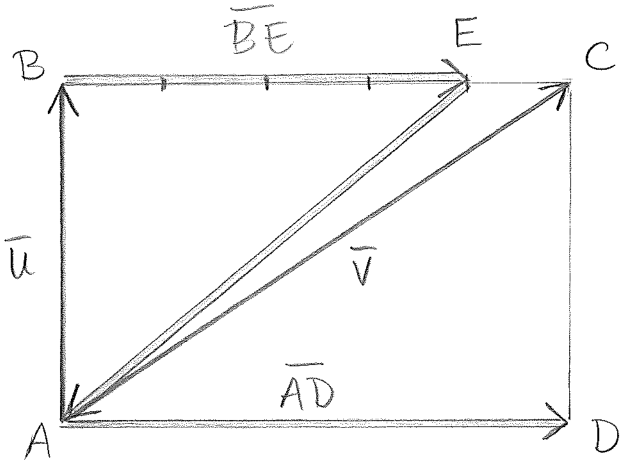
7. $\lg x = -2 \iff x = 10^{-2} \iff \underline{\underline{x=\frac{1}{100}}}$ $(=0{,}01)$

8. $5^x = \dfrac{1}{625}$ $\quad HL = \dfrac{1}{625} = \dfrac{1}{5^4} = 5^{-4}$

   Därmed är $\underline{\underline{x=-4}}$.

Del B: Problem

9.



En rektangel, enl. uppgiften.

Vi har $|BE| = 4|EC|$.

$\overline{u} = \overline{AB}$ $\qquad$ $\overline{v} = \overline{AC}$

- För att bestämma $\overline{AD}$: gå via C och notera att $\overline{CD} = -\overline{u}$. Alltså är $\underline{\underline{\overline{AD} = \overline{v} - \overline{u}}}$.

- $\overline{BE}$ är parallell med $\overline{AD}$, men lite kortare.

  Vi har att $|BE| + |EC| = |AD|$

  Men $|EC| = \frac{1}{4}|BE|$ enligt uppgift. Det ger

  $$|BE| + \frac{1}{4}|BE| = |AD| \iff \frac{5}{4}|BE| = |AD|$$

  $\iff |BE| = \frac{4}{5}|AD|$. Alltså är $\underline{\underline{\overline{BE} = \frac{4}{5}(\overline{v} - \overline{u})}}$.

- För att bestämma $\overline{EA}$: gå via B, dvs

  $$\underline{\overline{EA}} = -\overline{BE} - \overline{u} = -\frac{4}{5}(\overline{v} - \overline{u}) - \overline{u} = \underline{\underline{-\frac{4}{5}\overline{v} - \frac{1}{5}\overline{u}}}.$$

(Anm. Att $\overline{EA}$ är ungefär lika med $-\overline{v}$ ses i figuren och det stämmer med svaret.)

10. L_1 har punkt $(8,6)$ och riktningsvektor $(5,4)$.

L_1:s ekvation på parameterform är

$$(x,y)=(8,6)+(5,4)t=(8+5t,\ 6+4t). \qquad L_1$$

L_2 har punkt $(-3,4)$ och normalvektor $(1,3)$.

En riktningsvektor ges av $(3,-1)$, ty denna är vinkelrät mot $(1,3)$. ($(3,-1)\cdot(1,3)=3-3=0$)

L_2:s ekvation på parameterform är

$$(x,y)=(-3,4)+(3,-1)s=(-3+3s,\ 4-s). \qquad L_2$$

För skärningspunkten gäller:

$$\begin{cases} 8+5t=-3+3s & \text{I} \\ 6+4t=4-s & \text{II} \end{cases}$$

I ger $s=-2-4t$. Detta sätts in i I:

$8+5t=-3+3(-2-4t) \iff 11+5t=-6-12t \iff$

$17t=-17 \iff t=-1$

(Då är $s=-2-4t=-2-4\cdot(-1)=2$; ej nödvändig.)

$t=-1$ sätts in i L_1:s ekvation för att ge

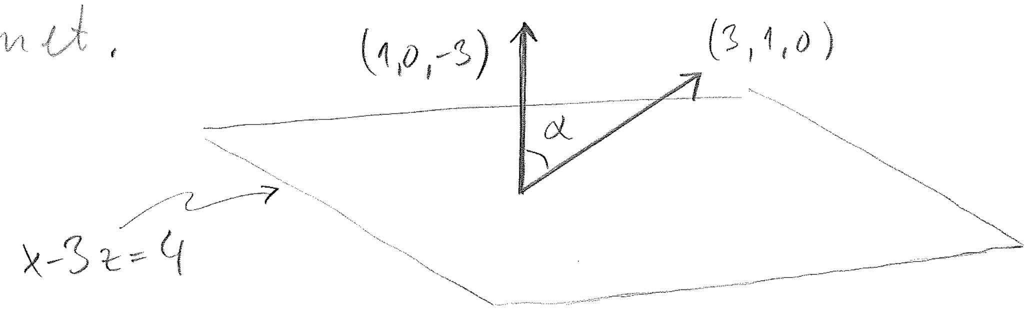
<u>skärningspunkten</u> $(x,y)=(8+5\cdot(-1),\ 6+4\cdot(-1))=\underline{(3,2)}$.

(Kontroll med $s=-6$ i L_2:s ekvation:

$(x,y)=(-3+3\cdot 2,\ 4-2)=(-3+6,\ 2)=(3,2)$ OK!)

11. a) Nej, vektorn $(3,1,0)$ är inte parallell med planet $x-3z=4$.

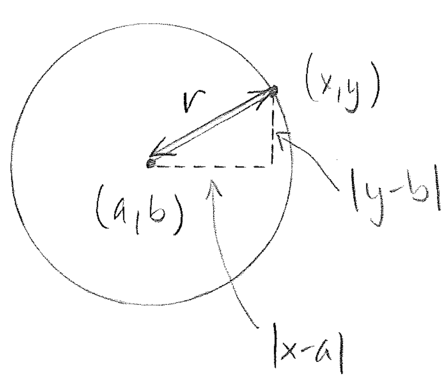
Planet har en normalvektor $(1,0,-3)$. Att skalärprodukten $(3,1,0)\cdot(1,0,-3)=3$ inte är noll visar att dessa vektorer ej är vinkelräta. Då kan $(3,1,0)$ ej vara parallell med planet.



b) Ja, en cirkel kan beskrivas med en ekvation.

Alla punkter (x,y) på det radiella avståndet r från en mittpunkt (a,b) uppfyller, enligt Pythagoras sats, ekvationen

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$



c) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots$ har kvoten $\frac{3}{4}$.

Eftersom $\frac{3}{4}<1$ är serien konvergent (summan är $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$). Påståendet att serien divergerar är alltså falskt.

12. $z^4 = 64(\cos 120° + i \sin 120°)$

Vi söker lösningar $z = r(\cos v + i \sin v)$, $r > 0$. Då är

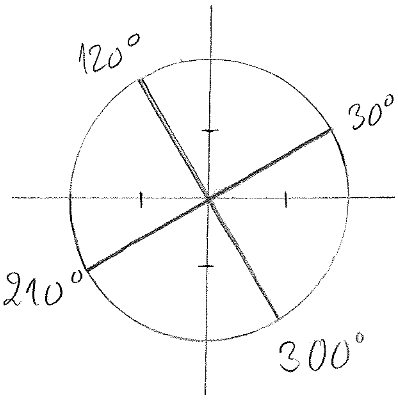
$$z^4 = r^4 (\cos(4v) + i \sin(4v)).$$

Vi ser att $r^4 = 64$ och $4v = 120° + 360° \cdot n$, n heltal.

$$r^4 = 64 \iff r^2 = 8 \iff r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(Här har vi tagit hänsyn till att $r > 0$.)

$$4v = 120° + 360° n \iff v = 30° + 90° n$$



$n = 0, 1, 2, 3$ ger olika lösningar.

Från standardvärden $\frac{1}{2}$ och $\frac{\sqrt{3}}{2}$ för sinus och cosinus av vinklarna kan lösningarna skrivas på rektangulär form.

$$\underline{\underline{z}} = 2\sqrt{2}(\underbrace{\cos 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + i \underbrace{\sin 30°}_{\frac{1}{2}}) = \underline{\underline{\sqrt{6} + \sqrt{2}\, i}}$$

$$\underline{\underline{z}} = 2\sqrt{2}(\underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin 120°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}) = \underline{\underline{-\sqrt{2} + \sqrt{6}\, i}}$$

$$\underline{\underline{z}} = 2\sqrt{2}(\cos 210° + i \sin 210°) = \underline{\underline{-\sqrt{6} - \sqrt{2}\, i}}$$

$$\underline{\underline{z}} = 2\sqrt{2}(\cos 300° + i \sin 300°) = \underline{\underline{\sqrt{2} - \sqrt{6}\, i}}$$

13. $p(x) = \left(2x^8 - \frac{1}{x}\right)^{16} = \sum_{k=1}^{16} \binom{16}{k} (2x^8)^k \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{16-k}$

enligt Binomialsatsen.

Eftersom $(2x^8)^k \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{16-k} = 2^k x^{8k} (-1)^{16-k} x^{-(16-k)}$

$= 2^k (-1)^{16} (-1)^{-k} x^{8k-16+k} = 2^k (-1)^k x^{8k-16}$ så är

$$p(x) = \sum_{k=1}^{16} \binom{16}{k} 2^k (-1)^k x^{9k-16}.$$

Andragradstermen ges av att $9k-16=2 \iff k=2$.

<u>Koefficienten är</u> $\binom{16}{2} 2^2 (-1)^2 = \frac{16!}{2!\,14!} \cdot 2^2 \cdot 1 =$

$$= \frac{16 \cdot 15}{\cancel{2}} \cdot 2^{\cancel{2}} = 16 \cdot 30 = \underline{\underline{480}}.$$

14. $y = x^3 - 2x^2 + 2$

a) Vid "kubkomplettering" blir den kubiska termen $\left(x - \frac{2}{3}\right)^3$. I inflexionspunkten är denna 0, vilket alltså ger $x = \frac{2}{3}$. Motsvarande y-värde är

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{3} + 2 \cdot \frac{27}{27} = \frac{8-24+54}{27} = \frac{38}{27}.$$

<u>Inflexionspunkten</u> är $\underline{\left(\frac{2}{3}, \frac{38}{27}\right)}$

b) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 = x^3 - 3 \cdot \frac{2}{3} x^2 + 3 \cdot \frac{4}{9} x - \frac{8}{27} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3} x - \frac{8}{27}$

medför att $y = \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{4}{3} x + \frac{8}{27} + 2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{4}{3} x + \frac{62}{27}$.

<u>Tangenten i inflexionspunkten är</u> $\underline{\underline{y = -\frac{4}{3} x + \frac{62}{27}}}$.