SERIER OCH GENERALISERADE INTEGRALER

MARTIN TAMM

1. Inledning

Då och då har vi i tidigare kurser ställts inför problemet att hantera summor med oändligt många termer, t ex

Exempel 1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \tag{1}$$

eller

Exempel 2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \tag{2}$$

I det första fallet är det lätt att, med hjälp av formeln för geometriska summor, övertyga sig om att svaret bör bli 2:

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \to 2 \quad \text{när} \quad N \to \infty. \tag{3}$$

I det andra fallet går det också att övertyga sig om att summan bör bli oändlig:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \tag{4}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right)}_{\geq 16\cdot\frac{1}{32} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{64}\right)}_{\geq 32\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{2}} + \dots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2},$$

där n kan väljas hur stort som helst om vi bara grupperar ihop tillräckligt många termer.

Men hur gör vi med följande oändliga summor?

Exempel 3.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \tag{5}$$

eller

Exempel 4.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{6}$$

I Exempel 3 går det knappast att tala om något värde alls på summan. I Exempel 4 kan man, som vi ska återkomma till senare, summera västerledet till precis vilket reellt tal som helst om man bara lägger ihop termerna i lämplig ordning (Se Kapitel 6)!

Dessa svårigheter hänger ihop med att addition av oändligt många tal inte är något som är definierat i de talsystem som vi använder. Ovanstående resonemang är därför i princip inte legitima, utan bygger på någon sorts intuitiv generalisering, baserad på våra kunskaper om ändliga summor.

I matematiken kan den här typen av släpphänthet få katastrofala konsekvenser. Vi kan omöjligt acceptera metoder som ibland leder rätt och ibland fel, utan att vi vet varför. Därför är vi, för att komma vidare, tvungna att ersätta den intuitiva idén om "oändliga summor" med en strikt definition:

Definition 1. Ett uttryck på formen $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ kallas för en *serie*. Seriens *summa* s definieras som

$$s = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=k_0}^{N} a_k,$$

om detta gränsvärde existerar. $s_N = \displaystyle\sum_{k=k_0}^{N} a_k$ kallas för seriens N:te *partialsumma*.

Man kan alltså säga att vi återför begreppet oändlig summa på begreppet gränsvärde, som vi redan har en bra teori för. Det är viktigt att notera att definitionen fungerar lika bra för komplexa talföljder $\{a_k\}_{k=k_0}^{\infty}$ som för reella, även om vi här huvudsakligen kommer att diskutera det sistnämnda fallet.

För den allmänna teorin spelar det nästan aldrig någon roll vad k_0 är. Samma typer av resonemang fungerar för t ex serier av följande typer:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad \sum_{k=-5}^{\infty} a_k, \qquad \text{eller} \quad \sum_{k=27}^{\infty} a_k. \tag{7}$$

I fortsättningen formulerar vi de flesta satser så att indexeringen börjar från 0 eller 1, och överlåter den triviala generaliseringen till mer allmänna index åt läsaren.

Som en första konsekvens kan vi notera att serier alltså *inte* är summor utan gränsvärden. Med detta synsätt blir det också helt naturligt att vissa serier konvergerar (och att vi då kan tala om deras gränsvärden som summor), medan andra serier divergerar (och därför saknar summa). I praktiken är det också ändamålsenligt att tala om en series (oändliga) summa om $s_N \to \pm\infty$.

Om vi sammanfattar våra exempel ovan så gäller att serien i Exempel 1 ovan verkligen har summa 2 medan seriens i Exempel 2 är divergent ($s = \infty$). Serien i Exempel 3 är divergent och saknar summa, eftersom varannan partialsumma blir 0 och varannan blir 1. I Exempel 4 medför definitionen ovan att seriens summa blir

$\ln 2$. Detta visas enklast med hjälp av MacLaurin-utvecklingen av $\ln(1+x)$ (se [2]):

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + (-1)^N \frac{1}{(1+\theta x)} \cdot \frac{x^{N+1}}{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{8}$$

Om vi nu sätter $x = 1$ och låter $N \to \infty$, så ser vi att resttermen går mot 0 och att högerledet därför konvergerar mot den givna serien, medan vänsterledet är lika med $\ln 2$.

Det finns många exempel på serier som går att beräkna exakt, men det finns ingen systematisk metod för hur detta ska göras.

Exempel 5. Exempel 1 kan lätt generaliseras till en godtycklig serie av typen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{om} \quad |x| < 1. \tag{9}$$

Observera att x även kan vara komplext.

Serien i Exempel 5 är ett exempel på en potensserie:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \tag{10}$$

Potensserier kan i viss mening betraktas som polynom av oändligt gradtal, och det finns många likheter med vanliga polynom (men även olikheter). x kan vara en reell variabel, men det är ännu vanligare (och viktigare) att studera potensserier där variabeln och även koefficienterna får vara komplexa. Vi återkommer till teorin för potensserier i kursen Analys B.

Exempel 6. Ett annat exempel som vi lätt kan beräkna är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}. \tag{11}$$

Vi gör observationen

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \tag{12}$$

vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \tag{13}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1,$$

Den tillsynes närbesläktade serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{14}$$

är det emellertid betydligt svårare att komma åt (en vanlig metod är att använda Fourier-analys, men det finns också elementära bevis, se t ex [1]).

Men ofta är inte den viktigaste frågan att exakt bestämma värdet på en serie. I många fall räcker det att veta om serien konvergerar eller divergerar. För att avgöra detta finns det förhållandevis effektiva metoder, och det är framför allt dessa som kommer att tas upp i de följande kapitlen.

2. Integraler som är generaliserade i $+\infty$

Det finns en nära analogi mellan serier och generaliserade integraler av typen $\int_a^\infty f(x)\,dx$. På samma sätt som serier egentligen inte ska betraktas som summor utan som gränsvärden (av summor), så ska generaliserade integraler inte heller betraktas som integraler utan som gränsvärden (av integraler). För en integral som är generaliserad i $+\infty$ är definitionen

Definition 2.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx,$$

om detta gränsvärde existerar ändligt. Den generaliserade integralen säges då vara konvergent, annars säges den vara divergent. Om gränsvärdet existerar oegentligt så säger man ofta att den är lika med $+\infty$ eller $-\infty$.

Exempel 7.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} [\arctan x]_0^R = \lim_{R\to\infty} \arctan R = \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

Den generaliserade integralen är alltså konvergent med värdet $\pi/2$. I det här fallet kan vi tolka det som att arean av det område i första kvadranten som ligger under grafen är ändlig med arean just $\pi/2$.

Exempel 8.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x} = \lim_{R\to\infty} [\ln(1+x)]_0^R = \lim_{R\to\infty} \ln(1+R) = \infty. \tag{16}$$

Den generaliserade integralen är alltså divergent ($= +\infty$), och arean av det område i första kvadranten som ligger under grafen är oändlig.

Exempel 9.

$$\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} [\sin x]_0^R = \lim_{R\to\infty} \sin R. \tag{17}$$

Det sista gränsvärdet existerar varken egentligt eller oegentligt så den generaliserad integralen är divergent (och det är lönlöst att försöka tala om något värde).

Exempel 10.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{18}$$

I det här fallet visar det sig att gränsvärdet faktiskt existerar och är lika med $\pi/2$ (för konvergensen, se Sats 14 i Kapitel 7). Men det går inte att tolka resultatet som någon area. Det här exemplet påminner i mycket om Exempel 4 i Kapitel 1, men det är betydligt svårare att utföra beräkningen av integralen. En metod (som bygger på analytiska funktioner) gås igenom i Analys B.

Det kan också påpekas att vi här behandlar integralen som generaliserad endast i oändligheten. Men vad händer egentligen när $x \to 0$? Där blir ju integranden också odefinierad? Faktum är att den här typen av "generalisering" i stort sett är helt och hållet problemfri, eftersom funktionen faktiskt går att utvidga till en funktion som är kontinuerlig även i origo. I fortsättningen kommer vi inte att uppmärksamma sådana "singulariteter" utan behandlar sådana generaliserade integraler som om de hade haft kontinuerliga integrander redan från början.

Det finns mycket som är gemensamt i metoderna för att avgöra konvergens och divergens hos serier och generaliserade integraler. Men det finns också, som vi kommer att upptäcka, en del skillnader som är värda att observera.

3. Generella egenskaper hos serier och generaliserade integraler

Innan vi går vidare med specifika kriterier för konvergens och divergens så kan det vara värt att notera några generella egenskaper.

Lemma 1.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

Detta är egentligen en trivial tillämpning av räknereglerna för gränsvärden av talföljder på följderna av partialsummor. Precis som för vanliga gränsvärden ska lemmat tolkas som att *om* serierna i högerledet konvergerar så konvergerar även vänsterledet och likhet gäller.

Anmärkning 1. Man kan också formulera varianter av lemmat som t ex säger att summan av en konvergent och en divergent serie är divergent, men detaljerna lämnas åt läsaren.

Det är även värt att observera att (den formella) summan av två divergenta serier mycket väl kan vara konvergent, t ex

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\Big((-1)^k + (-1)^{k+1}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0. \tag{19}$$

Här är det alltså i vänsterledet *inte* frågan om att vi lägger ihop två tal, utan det handlar om en rent formell operation på serier.

Motsvarande lemma för generaliserade integraler ser ut så här:

Lemma 2.

$$\int_a^{\infty}(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^{\infty} f(x)\,dx + \beta\int_a^{\infty} g(x)\,dx.$$

En annan viktig egenskap att notera är att en serie endast kan konvergera om termerna går mot noll:

Sats 1. *Om* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *är konvergent så följer att* $a_k \to 0$.

Detta följer av definitionen av partialsumma i Definition 1 ovan. Vi kan helt enkelt skriva $a_k = s_k - s_{k-1}$ och notera att om serien är konvergent med summan s så blir $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Sats 1 kan faktiskt vara ett användbart kriterium för att visa att vissa serier *inte* konvergerar. I vissa fall då inget annat verkar fungera kan det vara värt att kontrollera att termerna verkligen går mot noll.

Exempel 11. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ är divergent eftersom

$$a_k = \frac{k^k}{k!} = \frac{k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k} \geq 1. \tag{20}$$

Man ska akta sig för att tro att villkoret $a_k \to 0$ är ett tillräckligt villkor för konvergens. T ex går termerna i serien i Exempel 2 ovan mot noll, utan att serien för den skull skulle konvergera.

Det visar sig att analogin till Sats 1 för generaliserade integraler är falsk: Det finns exempel på generaliserade integraler som är konvergenta, trots att integranden inte går mot noll. Ett exempel på en sådan är

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)\, dx. \tag{21}$$

I själva verket övergår integralen efter variabelbytet $t = x^2$ i

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt, \tag{22}$$

som kan visas konvergera med samma metoder som vi senare kommer att möta i Sats 14 i Kapitel 7.

4. Positiva serier

En positiv serie är en serie sådan att $a_k \geq 0$ för alla k. För en sådan serie utgör följden $\{s_N\}$ av partialsummor en monotont växande talföljd. Enligt satsen om monoton konvergens finns det därmed bara två alternativ: antingen är följden av partialsummor begränsad och serien är konvergent, eller så är den obegränsad och serien divergerar (har summa $+\infty$). Ofta använder man därför för positiva serier beteckningarna

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad \text{respektive} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \tag{23}$$

för att markera om de är konvergenta eller divergenta. Däremot ska man inte använda dem för serier som inte är positiva. Motsvarande gäller för övrigt även generaliserade integraler.

Teorin för positiva serier är betydligt enklare än det allmänna fallet. Det visar sig att om alla termer är positiva så leder vår intuitiva uppfattning om "oändliga summor" oss för det mesta rätt. Dessutom kan man i många fall använda positiva serier för att dra slutsatser om serier som inte är positiva med hjälp av Sats 5 nedan.

Hur ska man gå tillväga för att avgöra om en positiv serie konvergerar? Om vi inte kan beräkna serien exakt så kan vi försöka hitta en enklare serie att jämföra med:

Sats 2 (Jämförelsekriterium I)**.** *Antag att* $0 \leq a_k \leq b_k$ *för* $k = 0, 1, \ldots$

(1) *Om* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *är konvergent så är även* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

(2) *Om* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *är divergent så är även* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *divergent.*

Bevis: Detta är en direkt följd av diskussionen innan satsen: om $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ är konvergent så finns en övre begränsning B till seriens partialsummor. Men eftersom

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \leq \sum_{k=0}^{N} b_k \leq B \tag{24}$$

så blir samma B en övre begränsning till partialsummorna till serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, vilket ger att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerar. Andra halvan visas på liknande sätt, genom att tillämpa lagen om olikheter för gränsvärden på en första olikheten i (24): Om $\sum_{k=0}^{N} a_k \to \infty$ så följer ju att även $\sum_{k=0}^{N} b_k \to \infty$. □

Anmärkning 2. Ett ändligt antal termer i början av en serie kan aldrig påverka frågan om konvergens eller divergens. Därför räcker det i princip att olikheten $a_k \leq b_k$ är uppfylld för alla $k \geq N$ för något visst N. En annan observation är att det räcker att visa att $a_k \leq cb_k$ för någon positiv konstant $c > 0$, eftersom serien $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergerar om och endast om $\sum_{k=0}^{\infty} cb_k$ gör det.

Exempel 12. Serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k\sqrt{k+1}}$ är konvergent. Detta beror på att

$$0 \leq \frac{1}{2^k\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{2^k}, \tag{25}$$

och $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ är konvergent enligt Exempel 1.

Exempel 13. Även serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{2^k}$ är konvergent. Detta kan i princip också visas med Jämförelsekriterium I om vi t ex observerar att

$$0 \leq \frac{\sqrt{k+1}}{2^k} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k, \tag{26}$$

för stora k. Detta följer av att $\frac{\sqrt{k+1}}{2^k} \Big/ \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sqrt{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^k \to 0$. Vi kan då i stället jämför med $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ som också är konvergent.

Den här tillämpningen känns kanske något mindre naturlig än föregående; vi måste själva göra vissa överläggningar innan vi kan tillämpa satsen. Nedan ska vi se att det finns en lång rad med olika varianter av Sats 2 som passar för olika situationer.

Sats 3 (Jämförelsekriterium II)**.** *Antag att* $0 < a_k, b_k$ *för alla stora* k*, och antag vidare att* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A$*, där* $0 < A < \infty$*. Då gäller att* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *är konvergent om och endast om* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *är konvergent.*

Beviset följer av Jämförelsekriterium I: om tillämpar gränsvärdesdefinitionen på gränsvärdet $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A$ med $\epsilon = A/2$ så följer att

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - A\right| < \frac{1}{2}A \Leftrightarrow \frac{1}{2}A < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3}{2}A \qquad \text{för} \quad k \geq N, \tag{27}$$

för något visst N. Det följer nu att $b_k \leq (2/A)a_k$ för $k \geq N$, vilket enligt Sats 2 och Anmärkning 2 ger att om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerar så konvergerar även $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

På liknande sätt ser vi att $a_k \leq \frac{3}{2}Ab_k$, vilket ger att om $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergerar så konvergerar även $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Exempel 14. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{k^2+k+1}$ är konvergent.

De dominerande termerna i täljare respektive nämnare är k respektive k^2. Därför bör serien för stora k bära sig åt ungefär som $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Vi observerar att

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{k+\sqrt{k}}{k^2+k+1}}{\frac{1}{k}} \to 1, \tag{28}$$

vilket enligt jämförelsekriterium II medför att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om och endast om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ gör det. Men $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är enligt Exempel 2 divergent, så detsamma gäller alltså för $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Det är viktigt att både a_k och b_k förutsätts vara positiva i Jämförelsekriterium II, vilket framgår av följande

Exempel 15. Betrakta de båda serierna

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right). \tag{29}$$

Eftersom $\ln(1+x) \approx x$ för x nära 0, så verkar det rimligt att förmoda serierna borde ha samma konvergensegenskaper. Om vi som i Sats 3 betraktar gränsvärdet

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}}{\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)} = 1, \tag{30}$$

så verkar detta stödja vår förmodan. Men den första serien är konvergent medan den andra är divergent! Det är alltså *inte* korrekt att dra någon slutsats av (30) i det här fallet eftersom serierna inte är positiva.

Konvergensen av den första serien ska vi visa lite senare i Sats 8. Här ska vi bara notera en korrekt tillämpning att Sats 3 ger att båda serierna inte kan vara konvergenta, eftersom skillnaden mellan dom faktiskt är en divergent serie. För att se detta observerar vi att MacLaurin-utveckling ger att $x-\ln(1+x) = \frac{1}{2}x^2+O(x^3)$, vilket med $x = (-1)^k/\sqrt{k}$ ger att

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right), \tag{31}$$

där serien i högerledet är positiv för stora k och därmed divergent, eftersom vi kan använda jämförelsekriterium II för att jämföra med serien i Exempel 2.

.

En annan kraftfull metod för att avgöra om en positiv serie konvergerar är att jämföra med integraler. Eftersom vi har tillgång till integralkalkylens huvudsats så är det mycket lättare att exakt beräkna integraler än att beräkna summor. Men för att kunna använda detta måste vi också kunna jämföra summor med integraler. Den idé som gör detta möjligt är att vi kan uppfatta ändliga summor som integraler av trappfunktioner. Om vi speciellt betraktar en positiv och avtagande funktion $f(x)$ på intervallet $[1,\infty[$ så är det lätt att övertyga sig om att

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le f(1)+f(2)+\ldots+f(n). \tag{32}$$

Högerledet kan ju tolkas som integralen över intervallet $[1,n+1]$ av den trappfunktion $\Psi(x) \ge f(x)$ som definieras av att $\Psi(x) = f(k)$ på $[k,k+1[$. Se den övre grafen i Figur 1.

Å andra sidan har vi också att

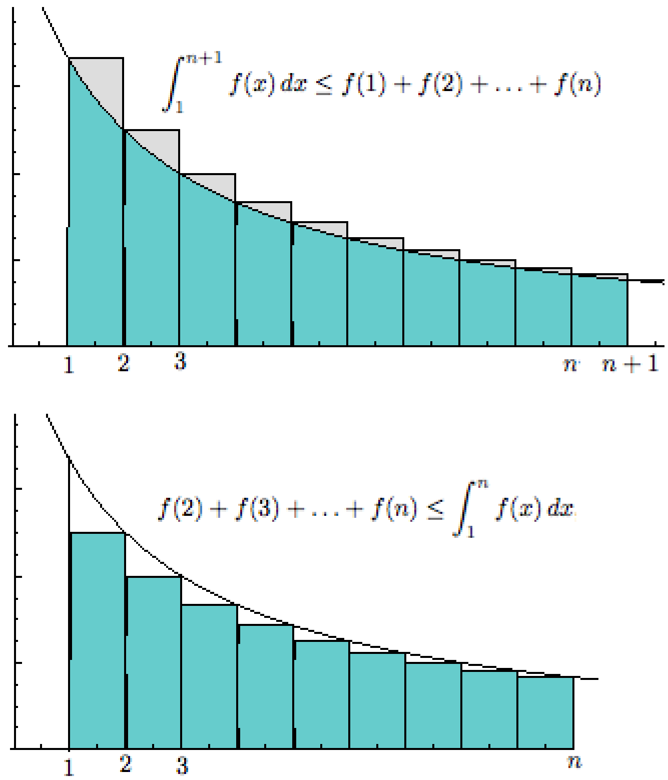
$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \le \int_1^n f(x)\,dx, \tag{33}$$

eftersom vänsterledet kan uppfattas som integralen över $[1,n]$ av den trappfunktion $\Phi(x) \le f(x)$ som definieras av att $\Phi(x) = f(k)$ på $[k-1,k[$. Se den undre grafen i Figur 1.

Om vi sätter ihop dessa olikheter får vi

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le f(1)+f(2)+\ldots+f(n) \le f(1)+\int_1^n f(x)\,dx. \tag{34}$$

Ur detta ser vi att partialsummorna $s_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ är uppåt begränsade (då $n\to\infty$) om och endast om integralerna $\int_1^n f(x)\,dx$ är uppåt begränsade (då $n\to\infty$). Vi har därmed bevisat



FIGUR 1. Jämförelse mellan trappfunktionernas och $f(x)$:s integraler

Sats 4 (Cauchys integralkriterium)**.** *För en positiv avtagande funktion på* $[1, \infty[$ *gäller att*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad \textit{konvergent} \quad \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \textit{konvergent.} \tag{35}$$

Exempel 16. För vilka värden på $\alpha > 0$ konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$? Enligt integralkriteriet gäller detta för precis samma α som för vilka motsvarande integral konvergerar. Men

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} (\alpha - 1)^{-1} & \text{om} \quad \alpha > 1, \\ \infty & \text{om} \quad \alpha \le 1. \end{cases} \tag{36}$$

Vi drar slutsatsen att serien konvergerar om och endast om $\alpha > 1$. (Vi kan för övrigt observera att det är trivialt att serien divergerar för $\alpha \le 0$, eftersom termerna då inte går mot 0.)

Exempel 17. Serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ är divergent eftersom integralen

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{N \to \infty} \cdot \int_2^{N} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{N \to \infty} [\ln(\ln x)]_2^N = \infty. \tag{37}$$

Notera att vi här som en variation har använt integralkriteriet på intervallet $[2, \infty[$ i stället.

Integralkriteriet och jämförelsekriterium II kan vara mycket effektiva i kombination med Taylor-utveckling:

Exempel 18. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \sin \frac{1}{k} - \sin \frac{2}{k}\right)$ är konvergent.

Vi börjar med att Maclaurin-utveckla $2 \sin x - \sin(2x) = x^3 + O(x^5)$, eller med $x = 1/k$:

$$a_k = 2 \sin \frac{1}{k} - \sin \frac{2}{k} = \frac{1}{k^3} + O\left(\frac{1}{k^5}\right). \tag{38}$$

Vi vet nu att serien för stora k bär sig åt ungefär som serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ som enligt integralkriteriet ovan är konvergent. Det ligger därför nära till hands att jämföra just med denna. Vi observerar därför att

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{k^3} + O\left(\frac{1}{k^5}\right)}{\frac{1}{k^3}} \to 1, \tag{39}$$

vilket enligt jämförelsekriterium II medför att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om och endast om $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ gör det. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är alltså konvergent.

5. Andra konvergenskriterier

En fundamental sats som återför en stor del av teorin för allmänna serier på teorin för positiva serier är följande:

Sats 5. *Om* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *konvergerar så konvergerar även* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Bevis: Antag först att serien är reell och låt $a_k^+ = \max(a_k, 0)$ och $a_k^- = \max(-a_k, 0)$. Då gäller att $0 \leq a_k^+, a_k^- \leq |a_k|$, och $a_k = a_k^+ - a_k^-$. Det följer att

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^-, \tag{40}$$

eftersom serierna i högerledet är positiva och konvergenta enligt jämförelsekriterium I. Satsen följer därför av Lemma 1.

Om $a_k = u_k + iv_k$ är komplexa så observerar vi att $0 \leq |u_k|, |v_k| \leq |a_k|$, vilket ger att $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ och $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |v_k|$ är konvergenta enligt jämförelsekriterium I, varefter den första delen av beviset ger att $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ och $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ är konvergenta och slutligen att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent enligt Lemma 1. □

Om en serie har egenskapen att $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergerar så kallas serien *absolutkonvergent*. Satsen ovan kan därför sammanfattas som att absolutkonvergens för en serie medför konvergens.

Serier som är konvergenta utan att vara absolutkonvergenta kallas *betingat* konvergenta. För sådana serier kan mycket märkliga saker inträffa. Vi återkommer till detta i Kapitel 6.

Ett exempel på ett mer specifikt konvergenskriterium, men som samtidigt ofta är lätt att använda är

Sats 6 (Cauchys rotkriterium)**.** *Antag att serien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *är sådan att*

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = A \quad \text{för något } A \in [0,\infty]. \tag{41}$$

Om $A < 1$ så är serien absolutkonvergent. Om $A > 1$ så är serien divergent.

Idén bakom satsen är mycket enkel: förutsättningen säger att $|a_k| \sim A^k$, dvs serien bär sig åt ungefär som en geometrisk serie med kvoten A, som ju är konvergent då $A < 1$ och divergent då $A > 1$. För att göra resonemanget precist använder vi gränsvärdesdefinitionen och jämförelsekriterium I:

Bevis: Om $A < 1$ så kan vi välja ett tal r så att $A < r < 1$. Välj ett heltal N så stort att $k \geq N \Rightarrow |a_k|^{1/k} < r$. Då blir $|a_k| \leq r^k$ för $k \geq N$, vilket betyder att serien kan uppskattas med en konvergent geometrisk serie. Påståendet i satsen följer därför av jämförelsekriterium I.

I fallet $A > 1$ så ger gränsvärdesdefinitionen i stället att $|a_k| \geq 1$ för alla $k \geq N$ för något tal N. Därmed kan inte termerna gå mot noll och divergensen följer av Sats 1. □

Om vi nu återvänder till Exempel 13 så ser vi att rotkriteriet är ett mycket effektivare hjälpmedel än jämförelsekriterium I för att visa konvergens. Det räcker nu att observera att

$$|a_k|^{1/k} = \left(\frac{\sqrt{k+1}}{2^k}\right)^{1/k} = \frac{(k+1)^{1/2k}}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \quad \text{när} \quad k \to \infty. \tag{42}$$

Ett annat exempel där rotkriteriet fungerar väl är

Exempel 19. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$ är konvergent eller ej. Vi ser i detta fall att

$$|a_k|^{1/k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \to \frac{1}{e} < 1 \quad \text{när} \quad k \to \infty, \tag{43}$$

vilket enligt rotkriteriet visar att serien är konvergent.

Å andra sidan finns det många fall där rotkriteriet inte går att använda. En vanlig typ av fall är då gränsvärdet A ovan blir 1, och rotkriteriet inte ger någon slutsats alls. Detta gäller t ex för alla serier av typen $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

Ett kriterium som har liknande användningsområde som rotkriteriet är följande

Sats 7 (d'Alemberts kvotkriterium)**.** *Antag att serien* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *är sådan att* $a_k \neq 0$ *för alla* k *och*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = A \quad \textit{för något } A \in [0,\infty]. \tag{44}$$

Om $A < 1$ *så är serien absolutkonvergent. Om* $A > 1$ *så är serien divergent.*

Idén i satsen är precis densamma som i Cauchys rotkriterium, nämligen att gränsvärdesvillkoret medför att $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ bär sig åt ungefär som en geometrisk serie med kvoten A.

Bevis: Om vi antar att $A < 1$ kan vi, precis som i beviset av rotkriteriet, välja r så att $A < r < 1$ och med hjälp av gränsvärdesdefinitionen hitta N så att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < r \quad \text{för} \quad k \geq N, \tag{45}$$

dvs $|a_{k+1}| < r|a_k|$ för alla $k \geq N$, vilket för ett godtyckligt $k > N$ ger att

$$|a_k| < r|a_{k-1}| < r^2|a_{k-2}| < \ldots < r^{k-N-1}|a_{N+1}| < r^{k-N}|a_N|. \tag{46}$$

Vi kan alltså (bortsett från de $N+1$ första termerna) uppskatta den givna serien med en konvergent geometrisk serie vilket ger påståendet.

I fallet $A > 1$ ger gränsvärdesdefinitionen i stället att det finns N så att för $k > N$ så måste

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1. \tag{47}$$

Men då är $|a_{k+1}| > |a_k|$ för $k > N$, vilket betyder att följden $\{|a_k|\}_{k=N}^{\infty}$ är växande och alltså inte kan gå mot 0. □

Ofta är det en smaksak om man vill använda rot- eller kvotkriteriet. Men i vissa fall kan det ena kriteriet ge betydligt enklare räkningar än det andra.

Exempel 20. Vi undersöker konvergensegenskaperna hos serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ med hjälp av kvotkriteriet:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{((k+1)!)^2(2k)!}{(k!)^2(2(k+1))!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{k+1}{(2k+1)2} \to \frac{1}{4} < 1, \tag{48}$$

vilket visar att serien är konvergent.

Observera att det hade gått att visa samma sak med rotkriteriet, men då hade vi behövt uppskatta $(k!)^{1/k}$ och $((2k)!)^{1/k}$, t ex med hjälp av Stirlings formel.

6. Betingat konvergenta serier

En serie som är konvergent men inte absolutkonvergent kallas, som tidigare nämnts, betingat konvergent. Ett enkelt exempel på en sådan är den så kallade alternerande harmoniska serien i Exempel 4. Vi har ju visat att seriens summa är $\ln 2$, men också att motsvarande serie när vi tar absolutbeloppen av alla termer (den harmoniska serien i Exempel 2) är divergent. Detta är ett exempel på en mer generell typ av betingat konvergenta serier:

Sats 8 (Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier)**.** *Låt $\{a_k\}_1^\infty$ vara en positiv avtagande talföljd sådan att $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Då är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ konvergent.*

Exempel 21. Serierna

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+1)} \tag{49}$$

är båda (betingat) konvergenta.

Bevis av satsen: Låt $s_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}a_k$ som vanligt beteckna seriens partialsummor. Vi tittar först på följden $\{s_{2m}\}_1^\infty$ av partialsummor med ett jämnt antal termer. Denna följd är monotont växande eftersom

$$s_{2(m+1)} - s_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq 0, \tag{50}$$

där vi i det sista steget använt att följden a_k är avtagande. Följden är positiv eftersom den är växande och $s_2 = a_1 - a_2 \geq 0$, men följden är också uppåt begränsad, eftersom

$$\begin{aligned} s_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} = \\ & a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2m-2} - a_{2m-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2m}}_{\geq 0} \leq a_1 \end{aligned} \tag{51}$$

för alla $m = 1, 2, \ldots$ Enligt en känd egenskap hos monotona talföljder betyder detta att följden $\{s_{2m}\}_1^\infty$ konvergerar mot ett tal s som uppfyller $0 \leq s \leq a_1$.

Men även följden $\{s_{2m+1}\}_{m=1}^\infty$ av partialsummor med udda antal termer konvergerar mot s, eftersom $s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1} \to s + 0 = s$. Ur detta följer att hela följden $\{s_N\}_{N=1}^\infty$ konvergerar mot s, vilket bevisar satsen. □

Som tidigare nämnts har betingat konvergenta talföljder ganska patologiska egenskaper. För att illustrera detta definierar vi en *omordning* η av de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$ som en bijektiv avbildning $\eta : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$. Givet en sådan omordning η kan vi nu även definiera motsvarande omordning av en godtycklig talföljd $\{a_k\}_1^\infty$, som den nya talföljden $\{a_{\eta(k)}\}_{k=1}^\infty$, och av en godtycklig serie som den nya serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_{\eta(k)}$.

Sats 9 (Riemanns omordningssats)**.** *En reell betingat konvergent serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ kan alltid omordnas så att den nya seriens summa blir lika med vilket på förhand givet reellt tal som helst (eller lika med $+\infty$ eller $-\infty$).*

Detta märkliga resultat skall jämföras med följande

Sats 10. *Om en absolutkonvergent serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *har summan* s *så har även alla omordningar av serien summa* s.

Så fort vi släpper kravet på absolutkonvergens så blir alltså den "addition" som serien ger sig ut för att representera i allra högsta grad icke-kommutativ! Det är bl a därför som det är bättre att inte se sådana serier som addition utan helt enkelt som gränsvärden.

Ingen av ovanstående satser är speciellt svår att visa. Men för att förstå idén med Riemanns omordningssats kan det ändå vara bättre att titta på ett konkret exempel. Vi vet redan att den alternerande harmoniska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{52}$$

är konvergent med summan $\ln 2$. Hur ska vi ordna om termerna om vi i stället vill att summan ska bli t ex 2? Vi börjar med att dela upp termerna i positiva och negativa, och noterar att dessa bildar divergenta serier:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = +\infty, \tag{53}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2k} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots = -\infty. \tag{54}$$

Detta kan enkelt visas, t ex genom att jämföra med den vanliga harmoniska serien i Exempel 2 och använda Jämförelsekriterium II. Men det följer också av generella egenskaper för betingat konvergenta serier: Om den ena av serierna (53) och (54) vore konvergent och den andra vore divergent så skulle ju deras summa (52) också vara diverent (vilket vi vet är falskt). Om å andra sidan både (53) och (54) vore konvergenta så skulle den vanliga harmoniska serien vara absolutkonvergent, eftersom denna just är skillnaden mellan (53) och (54) (vilket också är falskt enligt Exempel 2).

Om vi vill att summan ska bli 2 men samtidigt se till att alla termer i båda serierna kommer med så är en naturlig strategi att välja en ordning där vi går igenom den övre följden i snabbare takt. Vi börjar därför med att plocka så många termer ur denna som behövs för att deras summa ska bli större än två. Det visar sig att det behövs åtta termer:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15} \approx 2.0218 > 2. \tag{55}$$

Nu är det dags att stoppa in den första negativa termen:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15} - \frac{1}{2} \approx 1.5218 < 2. \tag{56}$$

Därefter fyller vi på med positiva termer tills summan blir större än 2 igen:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15} - \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{41} \approx 2.0041 > 2. \tag{57}$$

Vi lägger nu till nästa negativa term $-1/4$ och därefter ytterligare positiva termer tills summan återigen blir större än 2:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{15}-\frac{1}{2}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{41}-\frac{1}{4}+\frac{1}{43}+\ldots+\frac{1}{69}\approx 2.0095>2. \tag{58}$$

Efter ytterligare en negativ term och tillräckligt många positiva får vi:

$$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{15}-\frac{1}{2}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{41}-\frac{1}{4}+\frac{1}{43}+\ldots+\frac{1}{69}-\frac{1}{6}+\frac{1}{71}+\ldots+\frac{1}{95}>2. \tag{59}$$

Det är inte svårt att se att om vi fortsätter på detta sätt så kommer summorna att konvergera mot 2, och vi kommer också att så småningom inkludera alla termer i den ursprungliga serien, även om de positiva termerna tas med i en betydligt snabbare takt.

7. Olika typer av generaliserade integraler

I Kapitel 2 har vi infört generaliserade integraler av typen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ som har mycket gemensamt med serier. Men det finns många olika typer av generaliserade integraler. En integral kan vara generaliserad därför att integrationsintervallet är oändligt eller för att integranden är obegränsad, antingen i det inre av integrationsområdet eller då vi närmar oss någon av ändpunkterna. Här följer några exempel:

Exempel 22.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^0 e^x\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx. \tag{60}$$

Gemensamt för ovanstående exempel är att de är odefinierade som vanliga integraler, men kan ges mening som gränsvärden:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\big[2\sqrt{x}\big]_\epsilon^1=\lim_{\epsilon\to 0+}\big(2-2\sqrt{\epsilon}\big)=2,$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 e^x\,dx=\lim_{R\to\infty}\,[e^x]_{-R}^0=\lim_{R\to\infty}\big(1-e^{-R}\big)=1, \tag{61}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\,dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}\tan x\,dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\,[-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0+}\Big(-\ln(\cos(\frac{\pi}{2}-\epsilon)\Big)=\infty.$$

Men det är inte alls ovanligt att integraler kan vara generaliserade på flera sätt t ex:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{|x(x-1)(x-2)|}}. \tag{62}$$

Grundregeln för sådana generaliserade integraler är att man ska dela upp dem i integraler över olika intervall, som var och en endast innehåller en generalisering (en gränsövergång) i någon av intervallets ändpunkter. Och den generaliserade integralen är konvergent om och endast om *alla* delarna är det. Således kan vi tolka den första integralen som

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx =$$
$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} e^{-x^2}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} e^{-x^2}\,dx. \tag{63}$$

Att vi här valt att dela upp integrationsintervallet just i origo spelar ingen roll. Det är lätt att övertyga sig om att vi skulle få samma konvergensegenskaper och numeriska värde om vi hade delat i någon annan punkt. När det gäller den andra integralen skulle motsvarande indelning kunna se ut så här

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{|x(x-1)(x-2)|}} = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{1} + \int_1^{3/2} + \int_{3/2}^{2} + \int_2^3 + \int_3^\infty = \tag{64}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^{1/2} + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{1/2}^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{1+\epsilon}^{3/2} + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{3/2}^{2-\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{2+\epsilon}^{3} + \lim_{R\to\infty}\int_3^R .$$

I dessa två fall visar det sig att alla de ingående delarna är konvergenta, vilket alltså betyder att båda de generaliserade integralerna i (62) konvergerar.

Man kan fråga sig om det inte vore enklare att t ex tolka den första generaliserade integralen i (62) som ett enda gränsvärde?

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx. \tag{65}$$

Just i det här fallet skulle det inte spela någon som helst roll; vi skulle få exakt samma numeriska värde med denna definition som med den i (63). Men så är inte alltid fallet. Jämför t ex med följande:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx \quad \text{är divergent men} \quad \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,dx = 0. \tag{66}$$

Det som gör att vi får likhet i (65) är, grovt talat, att integranden är positiv. Motsvarande gäller även under något allmännare villkor, men vi går inte in på exakta villkor här.

Gränsvärdet till höger i (65) kallas *principalvärdet* av den generaliserade integralen. Sådana principalvärden kan vara mycket intressanta i många tillämpningar, men man bör komma ihåg att de inte alltid betyder detsamma som motsvarande generaliserade integraler.

Hur går man då tillväga för att avgöra om en generaliserad integral konvergerar i de fall då den inte går att beräkna exakt? Vi kan börja med att konstatera att de båda jämförelsekriterierna för serier direkt går att översätta till integraler:

Sats 11 (Jämförelsekriterium I)**.** *Antag att $f(x), g(x)$ är kontinuerliga och $0 \le f(x) \le g(x)$ för $x \in [a,\infty[$.*

(1) *Om $\int_a^\infty g(x)\,dx$ är konvergent så är även $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.*

(2) *Om $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är divergent så är även $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent.*

Sats 12 (Jämförelsekriterium II)**.** *Antag att $f(x), g(x)$ är kontinuerliga och $0 < f(x), g(x)$ för $x \in [a, \infty[$, och antag vidare att $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, där $0 < A < \infty$. Då gäller att $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent om och endast om $\int_a^\infty g(x)\,dx$ är konvergent.*

Här har kriterierna formulerats för fallet då integralerna är generaliserade i $+\infty$, men det går lätt att översätta dem till andra typer av generaliseringar. Vi avstår från explicita formuleringar, men se Exempel 24 nedan. Bevisen är också mycket snarlika motsvarande för serier och utelämnas här.

Exempel 23. Vi undersöker om den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$ är konvergent. Integralen är generaliserad i ∞ och eftersom $0 \le \sin^2 x \le 1$ är det naturligt att uppskatta integranden med $1/(1+x^2)$:

$$0 \le \frac{\sin^2 x}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx < \infty, \tag{67}$$

enligt jämförelsekriterium I, eftersom vi redan vet från Exempel 7 att $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ konvergerar.

Exempel 24. Vi undersöker om den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ är konvergent. Integralen är generaliserad i 0 och i närheten av denna punkt vet vi att $\sin x \approx x$. Det ligger då nära till hands att jämföra integranden med $1/\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1, \tag{68}$$

vilket ger att den generaliserade integralen konvergerar enligt jämförelsekriterium II, eftersom vi redan vet från Exempel 22 att integralen av $1/\sqrt{x}$ är konvergent.

När det gäller rotkriteriet och kvotkriteriet så finns det ingen naturlig motsvarighet för generaliserade integraler. Däremot kan begreppen absolutkonvergens och betingad konvergens lätt överföras på integraler:

Sats 13. *Om $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergerar så konvergerar även $\int_a^\infty f(x)\,dx$.*

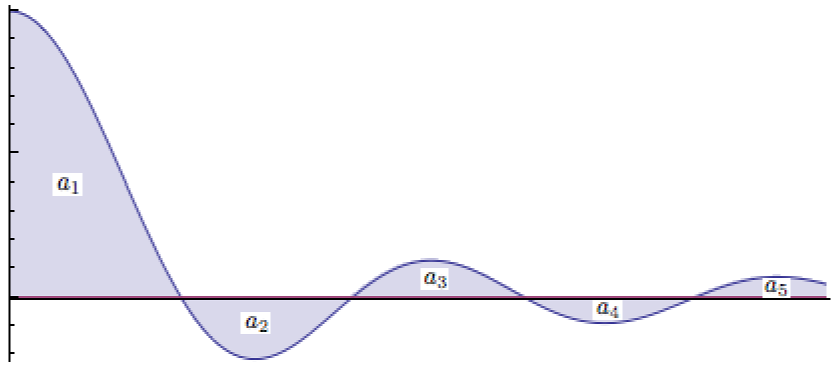
Precis som för serier finns det gott om exempel där den första integralen divergerar, medan den andra konvergerar. Liksom för serier kallas detta fenomen för betingad konvergens. Vi nöjer oss med att analysera ett exempel:

Sats 14. *Den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ är betingat konvergent.*

En tekniskt relativt enkel bevismetoden ser ut så här:

Bevis: Vi måste både visa att den generaliserade integralen konvergerar och att motsvarande med absolutbelopp divergerar.

Vi observerar först att det inte spelar någon roll för konvergensen om vi i stället betraktar integralen $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, eftersom integranden är begränsad på $[0, 1]$. Vi



FIGUR 2. De areor som svarar mot a_k.

kan nu partialintegrera:

$$\int_1^N \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^N - \int_1^N \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{69}$$

Den första termen i högerledet konvergerar mot $\cos 1$ när $N \to \infty$. Den andra termen har också ett ändligt gränsvärde eftersom observationen $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < \infty$ ger att den är absolutkonvergent enligt Jämförelsekriterium I.

För att visa att $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = +\infty$ observerar vi att $|\sin x| \geq \sin^2 x$, vilket ger att

$$\int_1^N \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx \geq \int_1^N \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^N \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx = \tag{70}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^N \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^N \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \ln N - \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 2x}{x}\right]_1^N - \frac{1}{4}\int_1^N \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx \to \infty, \tag{71}$$

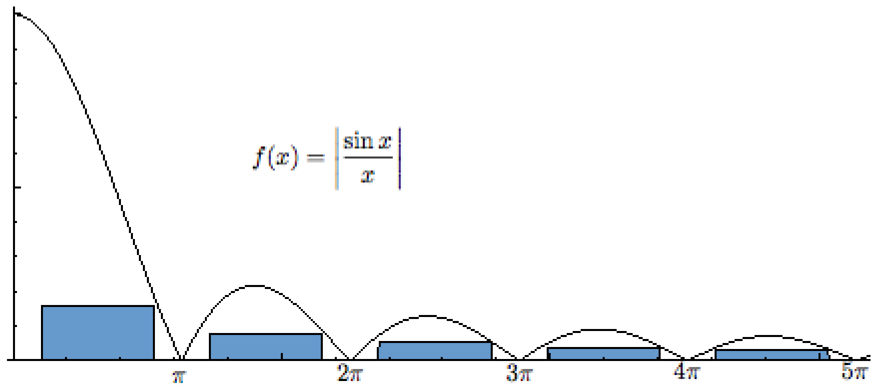
eftersom den sista integralen är absolutkonvergent av samma skäl som gällde för den sista termen i (69).

Ovanstående argument är kanske det tekniskt enklaste för att visa satsen, men det ger ingen djupare insikt i varför integralen faktiskt är betingat konvergent. Här följer ett alternativt bevis som bygger på observationen att integralen i satsen har stora likheter med de summor som förekommer i Leibniz kriterium för alternerande serier (Sats 8).

Alternativt bevis: Vi börjar med att notera att

$$s_N = \int_0^{N\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} a_k, \quad \text{där} \quad a_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx, \tag{72}$$

där vi har använt att $\sin x$ är positiv på $[(k-1)\pi, k\pi]$ om k är udda och negativ om k är jämnt (se Figur 2). För att visa att följden $\{s_N\}_{N=1}^\infty$ konvergerar räcker det enligt Leibniz kriterium för alternerande serier att visa att följden $|a_k|$ är avtagande.



FIGUR 3. En uppskattning nedåt av integralen av $|f(x)|$.

Detta följer lätt genom ett variabelbyte, $t = x + \pi$:
(73)
$$a_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t-\pi)|}{t-\pi}\,dt \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = a_{k+1}.$$

Strängt taget har vi bara visat att $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ existerar när R antar värden $k\pi$. För att visa att gränsvärdet existerar när R är en godtycklig reell variabel, räcker det att observera att

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{k\pi}^R \frac{\sin x}{x}\,dx, \tag{74}$$

där k är det största heltalet med egenskapen att $k\pi \leq R$. Den första termen i högerledet konvergerar enligt vad vi just visat, medan den andra går mot noll eftersom

$$\left|\int_{k\pi}^R \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{R-k\pi}{k\pi} \leq \frac{\pi}{k\pi} = \frac{1}{k} \to 0 \quad \text{då} \quad R \to \infty. \tag{75}$$

För att visa att integralen $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ divergerar noterar vi att

$$\int_{k\pi+\pi/6}^{k\pi+5\pi/6} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{\frac{1}{2}}{(k+1)\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3(k+1)}. \tag{76}$$

Här har vi använt att $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$ på alla intervall $[k\pi + \pi/6, k\pi + 5\pi/6]$, oberoende av k, och att $x \leq (k+1)\pi$ på samma intervall, samt att intervallets längd är $2\pi/3$. Olikheten i (76) svarar i själva verket mot att vi har uppskattat integralen med arean av motsvarande rektangel i Figur 3.

Intervallen $I_k = [k\pi + \pi/6, k\pi + 5\pi/6]$, $k = 0, 1, \dots$ är disjunkta och är alla innehållna i $[0, \infty[$, vilket medför att

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=0}^\infty \int_{I_k} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{3(k+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty \tag{77}$$

enligt Exempel 2, vilket visar påståendet. $\square$

8. Övningar

8.1. **Serier.** Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar:

$a)\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2k^2-1}$ $\quad b)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+1}{3^k-1}$ $\quad c)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k}\right)$

$d)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ln(1+k)$ $\quad e)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ln(1+\frac{1}{k})$ $\quad f)\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^k$

$g)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k}\right)^k k!$ $\quad h)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k}\right)^k k!$ $\quad i)\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{k!}$

$j)\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{1+k}$ $\quad k)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(k+1)-\ln k}{\sqrt{k}}$ $\quad l)\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(k!)}$

$m)\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(k!))^2}$ $\quad n)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$ $\quad o)\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2}$

Svar: b, c, e, g, i, j, k, m, n, o är konvergenta, övriga divergentan.

8.2. **Generaliserade integraler.** Avgör om följande generaliserade integraler konvergerar eller divergerar:

$a)\ \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^3+1}{x^5+x^3+1}dx$ $\quad b)\ \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$ $\quad c)\ \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{x^3}{e^x}dx$

$d)\ \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3-x^2+x-1}$ $\quad e)\ \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$ $\quad f)\ \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x}$

$g)\ \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}dx$ $\quad h)\ \displaystyle\int_0^{1}\ln\left(e^{1/x}+1\right)dx$ $\quad i)\ \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{\ln(\sin x)}$

Svar: a, b, c, g är konvergenta, övriga divergenta.

Litteraturförteckning

[1] Apostol The Mathematical Intelligencer, September 1983, Volume 5, Issue 3, pp 59-60
[2] Persson & Böiers, Analys i en variabel, Studentlitteratur 2000 (3:e upplagan).