MM5011 - Föreläsning 1

komplett anteckningar.

$\boxed{d=1}$

$I = [a, b].$

Indelning.

$a = x_0^1 < \dots < x_{n_1}^1 = b.$

$I_k^1 = [x_k^1, x_{k+1}^1].$

Φ trappfunktion.

$\Phi|_{I_k^1} \equiv$ kte.

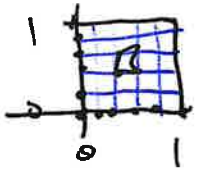
$$\int_I \Phi(x)\,d\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \Phi|_{I_k} \text{ längden}(I_k)$$

I_k

Anmärkning:

$d=2|$ $\iint_I \Phi(x,y)\,dx\,dy.$

$d=3|$ $\iiint_I \Phi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$



$[0,1]\times[0,1]$

$\boxed{d \geq 1}$

$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, a_{d+1}]$

Indelning av I

$a_k = x_0^k < \dots < x_{n_k}^k = b_k$

$\underbrace{I_{j_1 \dots j_d}}_{\vec{j}} = [x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1] \times \dots \times [x_{j_d}^d, x_{k+1}^d]$

Φ trappfunktion

$\Phi|_{I_{\vec{j}}} \equiv$ kte.

$$\int_I \Phi(\vec{x})\,d\vec{x} = \sum_{\vec{j}} \Phi|_{I_{\vec{j}}} \, Vol_d(I_{\vec{j}})$$

$Vol_d(I_{\vec{j}}) := V_1(I_{j_1}) \times \dots \times Vol_1(I_{j_d})$

Förklarning om notationen

$Vol_1(I) \equiv$ längden av intervallet I

$Vol_2(I) \equiv$ Arean av rektangeln I

$Vol_3(I) \equiv$ Volymen av parallellepiped I

$d=1$ $\quad I = [a_1, b_1] := \{x : x \in \mathbb{R} \quad a_1 \leq x \leq b_1\}$

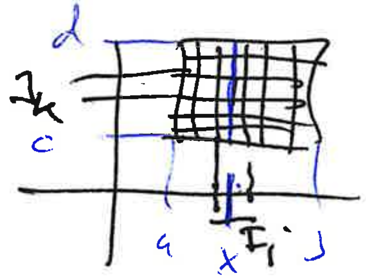
$d=2$ $\quad I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \quad a_j \leq x_j \leq b_j \quad j = 1, 2\}.$

$d=3$ $\quad I = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad a_j \leq x_j \leq b_j \quad j = 1, 2, 3\}.$

För $d \in \mathbb{N}$ $\quad Vol_d(I) \equiv$ Volymen av en d-dimensionell rektangel.

Om $\Phi(x,y)$ är trappfunktion.

Givet $x \in [a,b]$.



~~Givet~~ $x \in [a,b]$ $\exists j:$ $x \in I_j \subset [a,b]$

$$y \mapsto \Phi(x,y)$$

är en trappfunktion som funktion i variabeln y.

Så

$$A(x) = \int_c^d \Phi(x,y)\,dy = \sum_k \Phi|_{I_j \times J_k} \cdot Vol_1(J_k).$$

$A(x)$ är också en trappfunktion.

$$(*) \quad \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x,y)\,dy \right) dx = \sum_j \left(\sum_k \Phi|_{I_j \times J_k} Vol_1(J_k) \right) Vol_1(I_j)$$

$$= \sum_j \sum_k \Phi|_{I_j \times J_k} \underbrace{Vol_1(J_k)\,Vol_1(I_j)}_{Vol_2(I_j \times J_k)}$$

$$= \iint_{[a,b]\times[c,d]} \Phi(x,y)\,dx\,dy.$$

$\Delta =$ godtyckligt rektangel.

Def. Låt $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara <u>begränsad</u>.

Vi säger att $f \in R(\Delta)$ (integrerbar)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \underbrace{\sup_{\Phi \leq f} \int_\Delta \Phi \, d\bar{x}}_{\underline{\int}_\Delta f \, d\bar{x}} = \underbrace{\inf_{f \leq \Psi} \int_\Delta \Psi \, d\bar{x}}_{\overline{\int}_\Delta f \, d\bar{x}}$$

$$\overset{\text{sats.}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \Phi \leq f \leq \Psi \text{ sådant att}$$

$$\int_\Delta (\Psi - \Phi)\, d\bar{x} < \varepsilon.$$

[kolla beviset i Analys del 1]

Sats. Om $f \in R(\Delta)$ och $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ existerar.
$\Delta = [a,b] \times [c,d]$.

så gäller att
$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$\boxed{\text{Bevis}}$ — [Vi vet att det gäller för trappfunktioner (se sidan 2)(*))

Låt Φ, Ψ trappfunktioner sådana att
$$\Phi \le f \le \Psi \quad \forall \vec{x} \in \Delta \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Givet $x_1 \in [a,b]$.
$$\Phi(x_1, \cdot) \le f(x_1, \cdot) \le \Psi(x_2, \cdot)$$

och

$y \longmapsto \Phi(x_1, y)$ och $y \longmapsto \Psi(x_1, y)$ är trappfunktioner

Så gäller att

$$\underbrace{\int_c^d \Phi(x_1,y)\,dy \le \int_c^d f(x_1,y)\,dy}_{A(x_1)} \le \int_c^d \Psi(x_1,y)\,dy.$$

eftersom vi har antagit att $A(x_1)$ existerar (d.v.s. $y \mapsto f(x_1,y)$ är integrerbar över $[c,d]$)

Så

$$\iint_\Delta \Phi\,dy\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ (\star)\text{ sida 2}}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x_1,y)\,dy\right)dx \le \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$\le \int_a^b\left(\int_c^d \Psi(x,y)\,dy\right)dx = \iint_\Delta \Psi(\,dy\,dx$$

Så

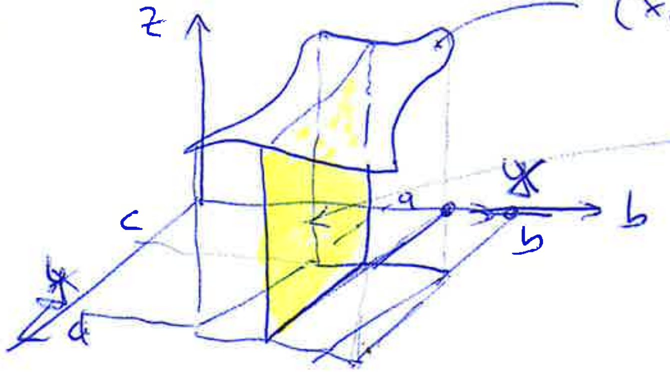
$$\underline{\iint_\Delta} f\,dx\,dy = \sup_{\Phi \le f} \iint_\Delta \Phi\,dx\,dy \le \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \le \overline{\iint_\Delta} f\,dx\,dy.$$

Vi har antaget att $f \in \mathcal{R}(\Delta)$. Det medför att

$$\iint_\Delta f \, dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx .$$

Grafiskt tolkning.

#



$(x,y,f(x,y))$

$$A(x) = \int_a^b f(x,y)\, dy .$$

Sats Om $f \in \mathcal{C}(\bar{\Delta}) \Rightarrow f \in R(\Delta)$

Dessutom $\forall x \in [a,b]$. $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ existerar

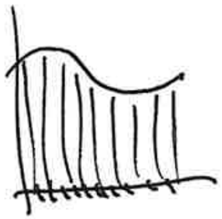
$\Rightarrow$ och $$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

----.

Om K är kompakt och $f \in \mathcal{C}(K) \Rightarrow f$ är likformigt kontinuerlig.

Def. $\left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x,y \in K \ \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right) \right]$

Ide i en dimension.



$x_k = a + \frac{b-a}{n} k$. $k = 0, \dots, n$

$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ Välj n så att $\frac{b-a}{n} < \delta/2$.

Bevis

Vi kommer att använda att alla kontinuerliga funktioner i en kompakt området är likformig kontinuerliga.
Beviset i dimension $d=1$, kan hittas i Appendix C i [PB1].
En liknande argument kan ger för $d \geq 1$.

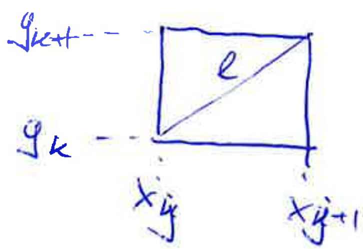
$\Delta = [a,b] \times [c,d]$ är kompakt. Så är f likformig kontinuerlig i Δ

Givet $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in \Delta \ (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

Låt

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} k \qquad k = 0, \dots, n$$

$$y_k = c + \frac{d-c}{n} k \qquad k = 0, \dots, n.$$



$$\left(\text{Notera att } \ l = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)(y_{k+1} - y_k)} = \frac{\sqrt{(d-c)(b-a)}}{n} \right)$$

där $n \geq n_0$ sådan

$$\frac{\sqrt{(d-c)(b-a)}}{n_0} < \delta/2 .$$

Så kan vi skapa en indelning av Δ

$$\Delta_{jk} = [x_j, x_{j+1}) \times [y_k, y_{k+1}) \qquad \begin{matrix} j = 0, \dots, n-1 \\ k = 0, \dots, n-1 \end{matrix}$$

Sådant $\forall j, k \in \{0, \dots, n-1\}$.

$$\left.\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Delta_{jk} \quad \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right| < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon. \right] (@)$$

Så om vi väljer

$$m_{jk} := \min_{\Delta_{jk}} f(x,y) \qquad M_{jk} = \max_{\Delta_{jk}} f(x,y)$$

och definierar trappfunktionerna

$$\Phi(x,y) = \sum_{j,k} m_{jk} \chi_{\Delta_{jk}}(x), \quad \Psi(x,y) = \sum_{j,k} M_{jk} \chi_{\Delta_{jk}}(x)$$

där för en givet mängd

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } (x,y) \in A \\ 0 & \text{om } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

|

Så gäller det att

$$M_{jk} - m_{jk} < \varepsilon \quad (\text{ty } (\circledast) \text{ gäller})$$

och

$$\Phi \le f \le \Psi$$

Därför

$$\iint_\Delta (\Psi - \Phi)\, dx\,dy = \sum_{j,k=1}^{n} (M_{jk} - m_{jk}) \cdot \overbrace{\frac{(d-c)(b-a)}{n^2}}^{\mathrm{Vol}_2(\Delta_{jk})}$$

$$< \varepsilon\, (d-c)(b-a) = \varepsilon\, \mathrm{Vol}_2(\Delta).$$

Eftersom det gäller för godtyckligt $\varepsilon > 0$, så gäller det att $f \in R(\Delta)$.

Eftersom $f \in \mathscr{C}(\Delta)$, $\forall x \in [a,b]$ $y \mapsto f(x,y)$ är kontinuerlig på $[c,d]$.

Så är det integrerbar över $[c,d]$. Så existerar

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy .$$

Notera att

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \binom{x}{y}, \binom{x'}{y'} \in \Delta \quad : \left| \binom{x}{y} - \binom{x'}{y'} \right| < \delta$$

$$\Rightarrow | f(x,y) - f(x',y') | < \varepsilon .$$

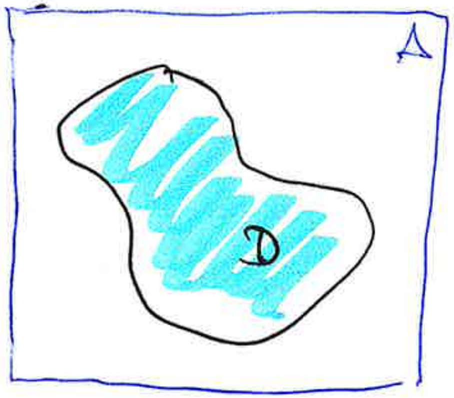
Så om $|x - x'| < \delta$

$$|A(x) - A(x')| \leq \int_c^d | f(x,y) - f(x',y) | \, dy < \varepsilon (d-c) .$$

Det medför att $A \in \mathscr{C}[a,b]$

#

Låt $D \subset \mathbb{R}^d$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$ begränsad funktion



Vi säger att f är integrerbar över D.

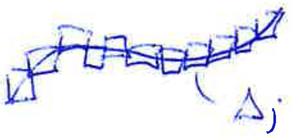
om i) $\exists \Delta$ rektangel så att $D \subset \Delta$

ii) $f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{om } (x,y) \notin D. \end{cases}$

f_D är integrerbar över Δ $\left(f_D \in R(\Delta) \right)$

Def. En mängd $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ är en nollmängd om.

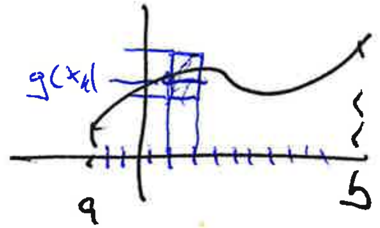
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists j = 1, \dots, N \quad (N \in \mathbb{N}) \quad \mathcal{N} \subset \underbrace{\biguplus_{j=1}^{N} \Delta_j}_{R}$ & $Vol_d(R) = \sum_{j=1}^{N} Vol_d(\Delta_j) < \varepsilon$



$\mathcal{N} \subset \bigcup \Delta_j$

$[\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset]$

Exempel. Grafen av kontinuerliga funktioner är en nollmängd.



$$G = \{ (x, g(x)) : x \in [a,b] \}$$

$$g \in \mathscr{C}([a,b])$$

Givet $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$: $\left.\begin{array}{l} |x - x'| < \delta \\ \forall x, x' \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{|g(x) - g(x')| < \varepsilon}_{g(x) - \varepsilon < g(x') < g(x) + \varepsilon}$.

Låt $x_k = a + \frac{b-a}{n} k$ $k = 0, \ldots, n$.

sådant att

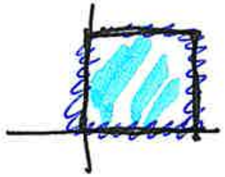
$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Låt $\boxed{\Delta_k = [x_k, x_{k+1}] \times [g(x_k) - \varepsilon, g(x_k) + \varepsilon]}$.

$\text{Area}(\Delta_k) = \frac{b-a}{n} \cdot 2\varepsilon \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \text{Area}(\Delta_k) = \cancel{n} \frac{(b-a)}{\cancel{n}} \cdot 2\varepsilon}$

$$\boxed{G \subset \biguplus \Delta_k}$$

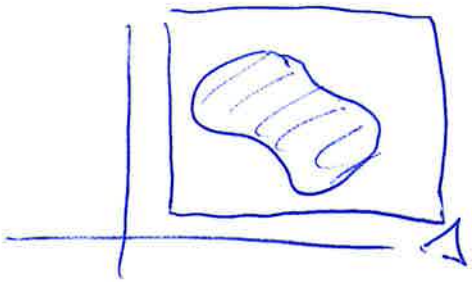
Def. Vi säger att en mängd D är **kvadrerbar** $\iff$ ∂D är en nollmängd.

D 

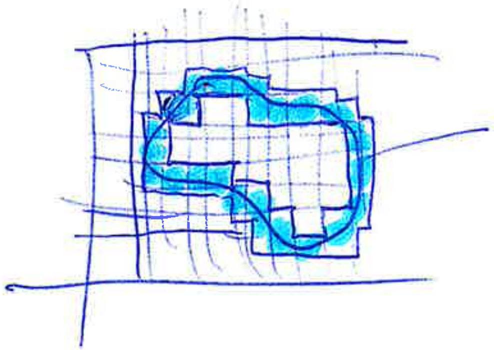
- Om $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n$ är nollmängdar så är $\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{N}_j$

Exempel.
$\mathcal{N} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. $\quad \partial \mathcal{N} = [0,1]$. $\quad Vol_1(\partial \mathcal{N}) = 1$.

Lemma. Om $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$, D begränsad och D kvadrerbar. då är $f \in R(D)$.



$$f_D = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{om } (x,y) \in \Delta \setminus D \end{cases}$$



R

Bevis Lemma.

Vi har antagit att ∂D är en nollmängd. Fix $\varepsilon > 0$.

Vi kan då hitta rektanglar $\{R_j\}_{j=1}^{N}$ sådana att

$$\partial D \subset \biguplus_{j=1}^{N} R_j =: R \quad \text{och} \quad Vol_d(R) = \sum_{j=1}^{N} Vol_d(R_j) < \varepsilon .$$

Vi kan förfinna rektanglar sådana att

$$\partial D \subset \biguplus_{j=1}^{N} R_j = R \qquad Vol_d(R) < \varepsilon$$

$$\overline{D} \subset \biguplus_{j=1}^{M} R_j = \Delta \quad \text{med } M > N.$$

sådana att

$$(**) \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in R_j \qquad |f_D(\vec{x}) - f_D(\vec{y})| < \varepsilon \qquad j = N+1, \dots, M$$

[Här använder vi likformighet kontinuitet av funktionen f strategi är liknande till den för beviset av Satsen i sidan 5]

Notera för dessa rektanglar där $R_j \subset (\overline{D} \cup R)^c$, $f_D(\vec{x}) = 0$.

Så är $(**)$ automatisk.

Vi definerar

$$m = \min_{\bar{\Delta}} f_D(x) \qquad M = \max_{\bar{\Delta}} f_D(x) = \max\left(\max_{\bar{D}} f(x), 0\right)$$

$$m_j = \min_{\bar{R}_j} f_D(x) \qquad M_j = \max_{\bar{R}_j} f_D(x).$$

och

$$\Phi(x) = \begin{cases} m_j & x \in R_j \text{ för } j = N+1, \dots, M \\ m & x \in R_j \text{ för } j = 1, \dots, N \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} M_j & x \in R_j \quad j = N+1, \dots, M \\ M & x \in R_j \quad j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Så har vi

$$\Phi \leq f \leq \Psi$$

och

$$\int_{\Delta} (\Psi - \Phi)\, d\bar{x} = \iint_{R} (\Psi - \Phi)\, d\bar{x} + \iint_{\Delta \setminus R} (\Psi - \Phi)\, d\bar{x}$$

$$< (M - m)\, \mathrm{Vol}_d(R) + \varepsilon\, \mathrm{Vol}_d(\Delta)$$

Så

$$\int_\Delta (\Psi - \Phi)\, d\bar{x} < \big(M - m + Vol_d(\Delta)\big)\,\varepsilon .$$

Därför är $f_D \in R(\Delta)$

Lemma Om f är en begränsad funktion och M är en nollmängd så är $f \in R(M)$ och $\int_M f\, d\bar{x} = 0$.

Bevis

$\forall \varepsilon > 0$ kan vi hitta en familj av rektanglar $\{R_j\}_{j=1}^N$ sådant att

$$M \subset \biguplus_{j=1}^N R_j \subset \Delta \text{ sådant att } \sum_{j=1}^N Vol_d(R_j) < \varepsilon .$$

Definiera

$$\Psi = \Phi = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Delta \setminus \bigcup R_j$$

$$\Phi = (\inf_\Delta f_M) \wedge (-1) \quad \text{om } x \in \bigcup R_j$$

$$\Psi = (\sup_\Delta f_M) \vee 1 \quad \text{om } x \in \bigcup R_j$$

Så gäller:

$$\Phi \leq f_n \leq \Psi$$

och

$$\underbrace{\left[(\inf f_n) \wedge (-1)\right]}_{\substack{\vee \\ -k\cdot\varepsilon}} \mathrm{Vol}_d(R) = \int_\Delta \Phi \, d\bar{x} \leq \underline{\int_\Delta} f_n \, d\bar{x} \leq \overline{\int_\Delta} f_n \, dx \leq \int_\Delta \Psi \, d\bar{x} = \underbrace{(\sup_\Delta f_n \vee 1) \cdot \mathrm{Vol}_d(R)}_{\substack{\wedge \\ L\cdot\varepsilon.}}$$

der $k, L \in [0, +\infty)$.

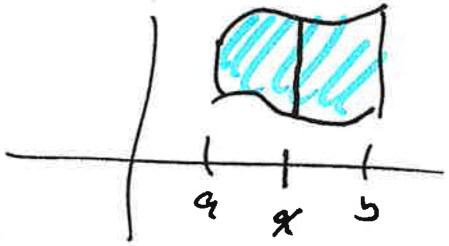
Eftersom det gäller för varje $\varepsilon > 0$, medför det att $f_n \in R(\Delta)$ och.

$$\int_\Delta f_n \, d\bar{x} = 0.$$

#

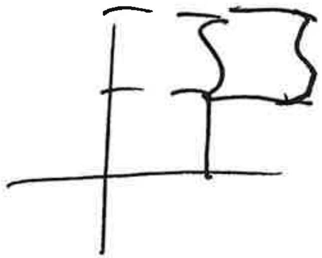
Sats. Om $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$ $\quad D = \{(x,y) : \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ x \in [a,b]\}$.

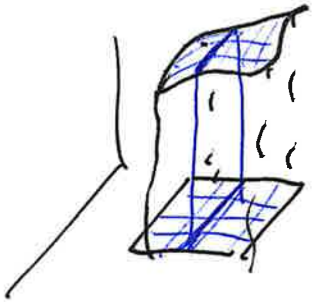
$\alpha, \beta \in \mathcal{C}([a,b])$



Så $f \in R(D)$ och

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$





Beviset

Randen är en nollmängd så är D kvadrerbar.

$f \in \mathcal{C}(\overline{D})$ så är $f \in \mathcal{R}(D)$. (~~$f_{|D} \in \mathcal{R}$~~

Låt $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ sådan att $c \leq \min \alpha(x) \leq \max \beta(x) \leq d$.

Så gäller $f_{|D} \in \mathcal{R}(\Delta)$ och

$\forall x \in [a,b]$ $y \longmapsto f_D(x,y)$ är integrabar över $[c,d]$.

och

$$A(x) = \int_a^b f_D(x,y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy.$$

Därför, satsen i sidan 4 ger oss.

$$\iint_\Delta f_D(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\parallel$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Notera att

$$A(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \underset{\uparrow}{=} \left[\int_0^1 f(x, \alpha(x) + t(\beta(x)-\alpha(x)))\,dt\right] (\beta(x)-\alpha(x))$$

$y = \alpha(x) + t(\beta(x)-\alpha(x))$

om vi kallar för

$$g(x,t) := f(x, \alpha(x)+t(\beta(x)-\alpha(x)))$$

ser vi att

$$g \in \mathcal{C}([a,b] \times [0,1])$$

ty är det en sammansättning av kontinuerliga funktioner.

En liknande argument till det i sidan 9 visas att

$$A(x) \in \mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b]).$$

[Det motiverar att vi kan använda satsen i sidan 4]