MM5011 - Föreläsning 2

Kom ihåg

Vi har definierad, analog som vi gjorde i Analys del A

$$\underline{\int_\Delta} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \sup_{\Phi \leq f} \int_\Delta \Phi(\bar{x})\,d\bar{x}$$

$$\overline{\int_\Delta} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \inf_{\Psi \geq f} \int_\Delta \Psi(\bar{x})\,d\bar{x}$$

Δ rektangeln i $\mathbb{R}^d$

f begränsad funktion.

f är integrerbar $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\overline{\int_\Delta} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \underline{\int_\Delta} f(\bar{x})\,d\bar{x}$.

Givet en indelning $\boxed{(I)}$ av $\Delta = \biguplus_{j=1}^{N} R_j$ i mindre rektanglar.

(kan vi definiera.

$$\delta(\Delta) := \text{diameter av } \Delta = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_d,b_d]$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)^2\right)^{1/2} = \sup_{x,y\in\Delta}|x-y|.$$
)

kan vi definiera två trappfunktioner

$$\Phi_I(x) = \inf_{z\in R_j} f(z) \quad \text{om } x\in R_j \qquad \Psi_I(x) = \sup_{z\in R_j} f(z) \quad \text{om } x\in R_j$$

som uppfyller $\left[\Phi_I \leq f \leq \Psi_I\right]$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in A \\ 0 & \text{om } x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}_A(x).$$

Så

$$\Phi_I(x) = \sum_j \left(\inf_{R_j} f(x)\right) \chi_{R_j}(x), \quad \Psi_I(x) = \sum_j \left(\sup_{R_j} f(x)\right) \chi_{R_j}(x)$$

Därför gäller att

$$\underline{\int}_\Delta f(\bar{x})\, d\bar{x} \geq \int_\Delta \Phi_I(\bar{x})\, d\bar{x} = \underbrace{\sum_j \left(\inf_{R_j} f(x)\right) \mathrm{Vol}_d(R_j)}_{\substack{\text{Riemann summan.} \\ \text{(undersumman)}}}$$

Man kan visa.

$$\left[\ \underline{\int}_\Delta f(\bar{x})\, d\bar{x} = \sup_I \int_\Delta \Phi_I(\bar{x})\, d\bar{x}\ \right]$$

och

$$\left[\ \overline{\int}_\Delta f(\bar{x})\, d\bar{x} = \inf_I \int_\Delta \Psi_I(\bar{x})\, d\bar{x}.\ \right]$$

f är <u>integrerbar över</u> $D \iff$ i) $\exists \Delta$ rektangeln där $D \subset \Delta$

ii) $f_D \in \mathcal{R}(\Delta)$ där

$$f\chi_D = f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{om } (x,y) \in \Delta \setminus D. \end{cases}$$

M är <u>nollmängd</u> $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists R_1, \dots, R_N$ rektanglar sådana

$$M \subset \biguplus_{j=1}^{N} R_j \quad \text{och} \quad Vol_d\left(\biguplus_{j=1}^{N} R_j\right) = \sum_{j=1}^{N} Vol_d(R_j) < \varepsilon.$$

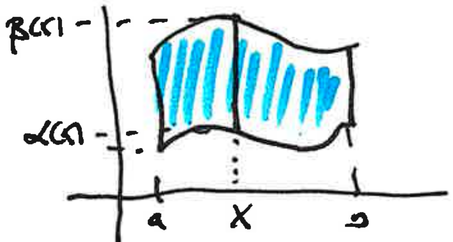
D är <u>kvaderbar</u> $\iff \partial D$ är en nollmängd.

<u>Sats</u> Om $f \in \mathcal{C}(\overbrace{\overline{D}}^{D \cup \partial D})$, D begränsat och kvadrerbar så är $f \in \mathcal{R}(D)$

Dessutom om $D = \{(x,y) : \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ x \in [a,b]\}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}([a,b])$)

gäller att

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



Följdsats.
Om $D \subset \mathbb{R}^d$ är kvadrerbar definierar vi

$$\mathrm{Vol}_d(D) := \int_D 1 \, d\bar{x}$$

(Jordanmått)

$d=2$ Area av området D

$d=3$ Volym av området D.

Sats Om f är begränsad och M är en nollmängd gäller att $f \in R(M)$ och $\int_M f \, d\bar{x} = 0$.

Kolla beviset i anteckningar för Föreläsning 1

$$\int_{\bar{D}} f(\bar{x}) \, d\bar{x} = \int_D f(\bar{x}) \, d\bar{x} + \underbrace{\int_{\partial D} f(\bar{x}) \, d\bar{x}}_{0}$$

D är begränsad och kvadrerbar öppet mängd.

$\bar{D} = D \cup \partial D$.

$\leadsto \partial D$ nollmängd

Riemannsummor.

Låt D vara en kompakt området som är indelat

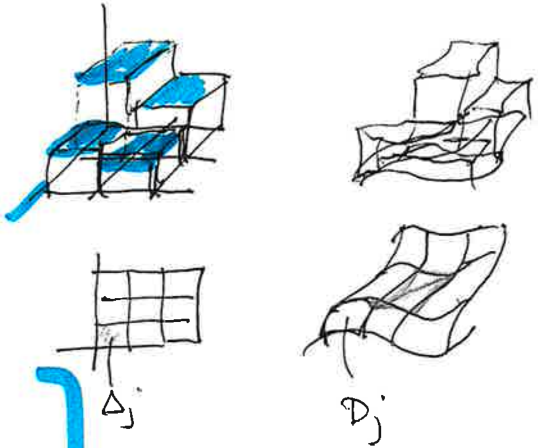
$$D = \biguplus_{j=1}^{n} D_j \qquad . \; D_j \text{ kvadrebar.} \qquad \left(I \equiv \text{indelningen } \biguplus_{j=1}^{n} D_j \right)$$

Vi definierar

$$\delta_I := \max_{j=1,\dots,n} \left(\operatorname{diam} D_j \right) \qquad \left[\operatorname{diam} D_j = \sup_{x,y \in D_j} |x-y| . \right]$$

För varje $k \in \{1,\dots,n\}$ välj $\bar{x}_k \in D_k$. och definiera

$$\Phi(\bar{x}) := \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_k) \chi_{D_k}(x) .$$



Så

$$\int_D \Phi(x)\, d\bar{x} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \, Vol_d(D_k)}_{} .$$

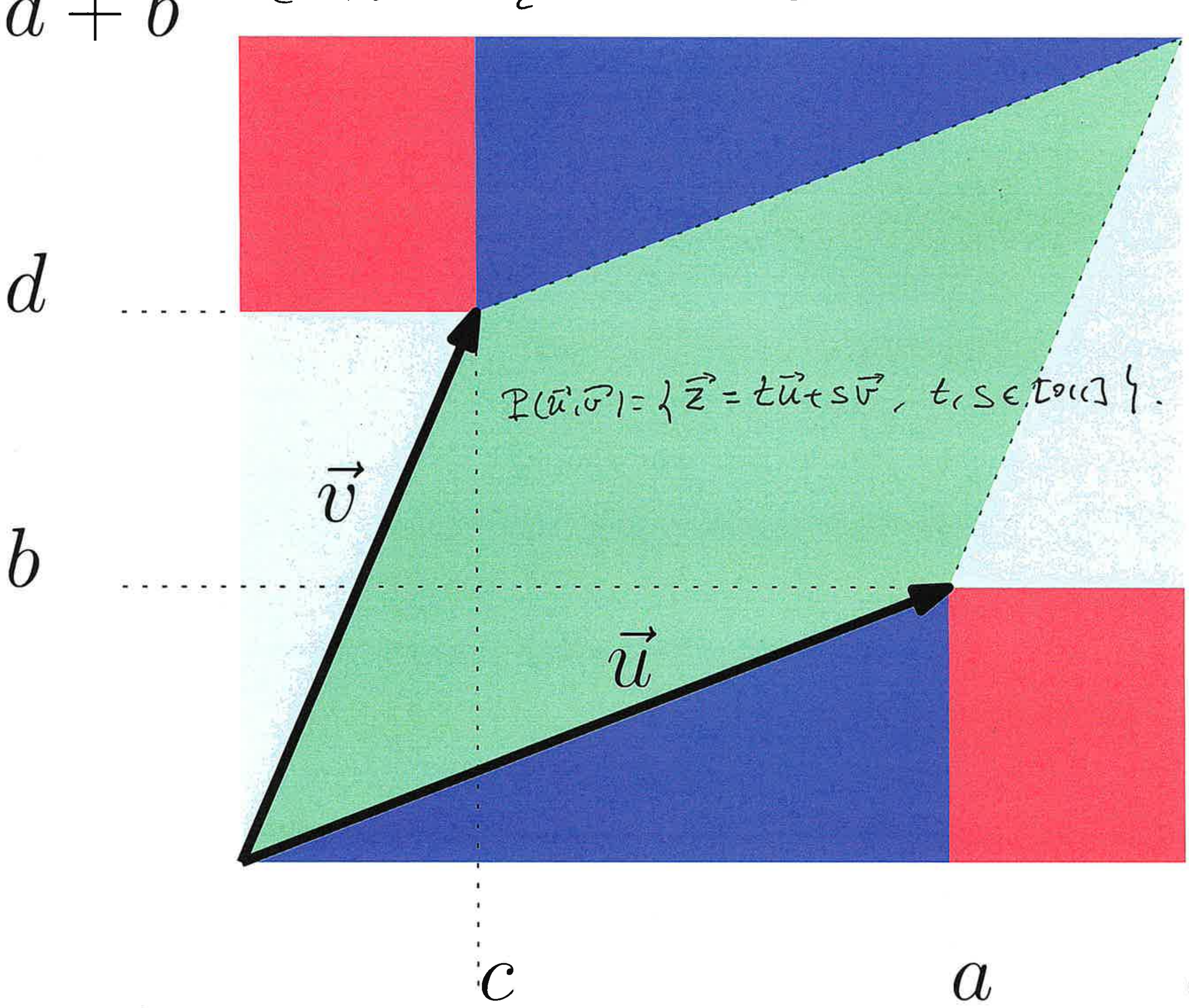
[Riemannsumma till f associerade till indelningen I]

Man kan visa:

Sats. Om $f \in \mathscr{C}(\overline{D})$, $\overline{D}$ är kompakt och kvadrerbar så gäller att

$$\lim_{\delta_I \to 0} \sum_{k=1}^{n_I} f(\bar{x}_k)\, \mathrm{Vol}_d(D_k) = \int_D f(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

$(a+c)(d+b) - \frac{2}{2}(a \cdot b - 2b \cdot c - \frac{2}{2} d \cdot c = \dots = ad - bc = \det(\vec{u}, \vec{v})$
$= |\vec{u} \times \vec{v}|$



$P(\vec{u}, \vec{v}) = \{ \vec{z} = t\vec{u} + s\vec{v},\ t, s \in [0,1] \}.$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

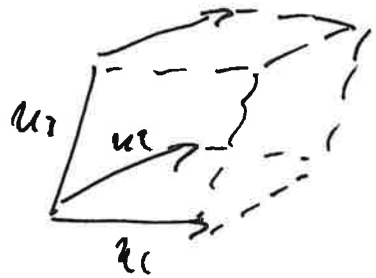
$\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$

I d-dimensioner.

$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d \in \mathbb{R}^d$ $\quad P(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d) = \{ x : \sum_{j=1}^{d} t_j \vec{u}_j \quad t_j \in [0,1] \}$.



$$\mathrm{Vol}_d (P(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d)) = |\det(\vec{u}_1 | \dots | \vec{u}_d)|$$

Definiera

$$A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \text{ linjär.}$$
$$\vec{e}_j \mapsto \vec{u}_j$$

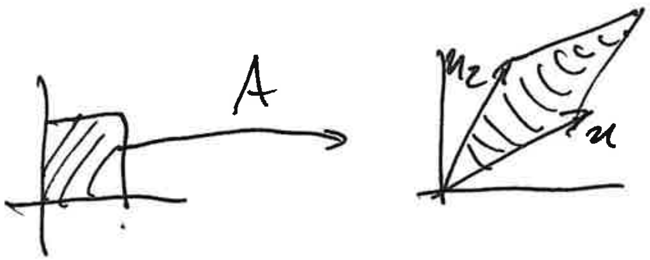
Så

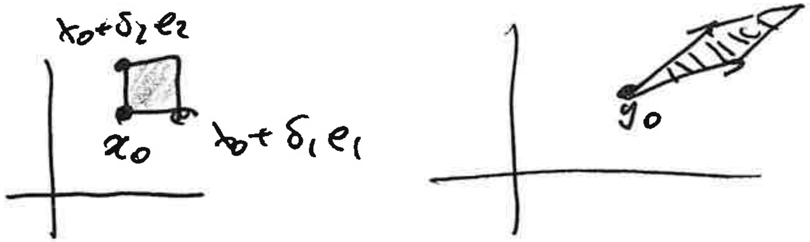
$$A = (\vec{u}_1 | \dots | \vec{u}_d) \qquad \vec{u}_j = A\vec{e}_j$$

$$\sum_{j=1}^{d} t_j A\vec{e}_j = A\left(\sum_{j=1}^{d} t_j \vec{e}_j\right)$$

$$P(\vec{u}_1 \dots \vec{u}_d) = A(P(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d))$$

och $\left[\mathrm{Vol}_d(P(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d)) = |\det A| \, \mathrm{Vol}_d(P(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)) \right]$





Låt $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$$x \longmapsto \Phi(x) = y_0 + A(x - x_0)$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$R = x_0 + P(\delta_1 e_1, \dots, \delta_d e_d) \longrightarrow \Phi(R) = y_0 + P(\delta_1 Ae_1, \dots, \delta_d Ae_d)$$

$$\mathrm{Vol}_d(\Phi(R)) = \mathrm{Vol}_d(P(\delta_1 Ae_1, \dots, \delta_d Ae_d)) =$$

$$= |\det A| \quad \mathrm{Vol}_d(P(\delta_1 e_1, \dots, \delta_d e_d)) \qquad [0,\delta_1]\times\dots\times[0,\delta_d]$$

$$= |\det A| \cdot \mathrm{Vol}_d(R).$$

Givet $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vi säger at f är differentierbar i x_0

Ω öppet

$x_0 \in \Omega$.

om och endast om

$\exists\, df(x_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear avbildning

sådant att, i en lite omgivning av x_0 gäller

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + |x - x_0|\, g(x - x_0)$$

där $g(z) \to \vec{0}$ då $z \to \vec{0}$

Matrisen $df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \middle| \cdots \middle| \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0) \right)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix}$$

kallas (total) derivata av f eller funktionalmatrisen.

(Kolla § 3.2 & § 3.3 i kursboken)

Sats (Variabelbyte)

Om $F : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$

F bijektivt mellan Ω och $F(\Omega)$

Ω öppet, begränsad, kvadrerbar.

$D = F(\Omega)$ " " "

$[\forall x \in \Omega \ \det(d\Phi(x)) \neq 0.]$

Så gäller

$$\forall f \in \mathcal{C}(D) \quad \int_{F(\Omega)} f(\bar{y})\, d\bar{y} = \int_{\Omega} f(F(\bar{x}))\, |\det d\Phi(\bar{x})|\, d\bar{x}$$

$y = F(x)$

Polära koordinater ($d=2$)

$$F : [0,\infty) \times [-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

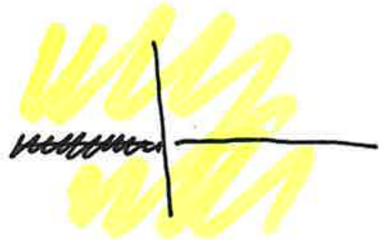
$$(r,\theta) \longmapsto F(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$\Omega = (0,+\infty) \times [-\pi,\pi)$

$F(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0]$.

F bijektion.

$F \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$



Given $s>0$

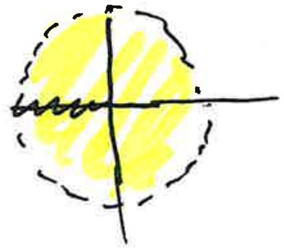
$\Omega_s = (0,s) \times (-\pi,\pi)$ öppet, begränsad, kvadrerbar

$D_s = F(\Omega_s) = B_s(0) \setminus [-s,0]$.

öppet mängd, begränsad.

kvadrerbar.

F är bijektivt



$$F(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad dF(r,\theta) = \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta),\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Så $\det(dF(r,\theta)) = r > 0 \ \forall (r,\theta) \in \Omega_s = (0,s) \times (-\pi,\pi)$

Så det gäller, $\forall f \in \mathcal{C}(\overline{B_s(0)})$

$$\iint_{\overline{B_s(0)}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\underbrace{B_s(0) \setminus [-s,0]}_{F(\Omega_s)}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ (r,\theta) \in \Omega_s \end{array} \right] = \iint_{\substack{\Omega_s \\ \shortparallel \\ (0,s) \times (-\pi,\pi)}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint_{[0,s]\times[-\pi,\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

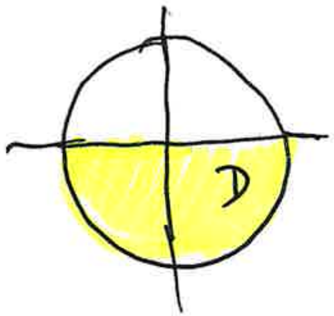
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^s f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^s \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta \right) dr.$$

Ex:

$$\iint_D x^2 y \, dx\, dy$$

$D = \{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1, \ y \leq 0\}.$



$D^* = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1, \ y < 0\}.$

$D \setminus D^*$ är en nollmängd.

$F((0,1)\times(\pi,2\pi))$

$F(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$|\det(dF(r,\theta))| = r.$

$$= \iint_{D^*} x^2 y\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{(0,1)\times(\pi,2\pi)} r^3 \cos^2\theta \sin\theta \, dr\, d\theta$$

$$\ldots = -2/15$$

Generaliserade Integraler.

Antag $\{D_j\}_j$ en följd av slutna (begränsad) kvadrerbara delmängder till en mängd D.

Vi säger att $\{D_j\}_j$ är uttömmande svit till D om

i) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$

ii) $\bigcup D_j = D$.

iii) $\forall K \subsetneq D$ kompakt kvadrerbar.
$\exists j : \forall l \geq j \quad K \subset D_l$

Ex.
$\{B_n(0)\}_{n \geq 1}$ är uttömmande svit till $\mathbb{R}^2$

Def. Antag att $f: D \to \mathbb{R}$ är en funktion sådan att $f \in R(D_k)$ för alla uttömmande svit ~~för~~ $\{D_k\}_k$ gäller att

$$\lim_{k \to +\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy = A$$

existerar och är oberoende av vilken uttömmande svit $\{D_j\}_j$ till D vi väljer.

Vi säger att den generaliserade integralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ existerar (är konvergent) med värdet A (Annars det kallas divergent).

Sats. Om $f \geq 0$ på D är gränsvärdet

$$\lim_k \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy$$

oberoende av vilken uttömmande svit $\{D_k\}_k$ till D vi väljer.

Eftersom $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$ så gäller att

$$\lim_{k\to\infty} \int_{D_k} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \sup_k \overbrace{\int_{D_k} f(\bar{x})\,d\bar{x}}^{I(D_k)} = A(D) \in [0,\infty].$$

Antag att $A(D) < +\infty$. Så $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 : \forall k \geq k_0$

$$A(D) - \varepsilon \leq I(D_k) \leq A(D).$$

Om $\{E_j\}$ är en andra uttömmande svit av D. och D_{k_0} är kompakt $\exists j_{k_0} : \forall \ell \geq j_{k_0} \quad D_{k_0} \subset E_{j_{k_0}} \subseteq E_\ell$.

Så

$$\forall \varepsilon > 0 \quad A(D) - \varepsilon \leq I(D_{k_0}) \leq I(E_\ell) \leq A(E).$$

som medför att

$$A(D) \leq A(E).$$

Notera att

$\forall \ell \quad \exists k_\ell$ som kan vi välja $k_\ell \geq k_{\ell-1}$

sådan att $E_\ell \subset D_{k_\ell}$.

Därför

$$I(E_\ell) \leq I(D_{k_\ell}) \leq A(D) < +\infty.$$

Så gäller att

$$A(E) = \sup_\ell I(E_\ell) \leq A(D).$$

Så är

$$A(E) = A(D).$$

En liknande argument kan visar fallet där $A(D) = +\infty$

Exempel

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Definiera $D_k = B_k(0) = \{z : |z| < k\}$.

$\{D_k\}$ är en uttömmande svit till $\mathbb{R}^2$

$$\iint_{B_k(0)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left[\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r \in (0,k) \\ \theta \in (-\pi,\pi) \end{array}\right] = \iint_{[0,k]\times[-\pi,\pi]} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

$\underset{\text{Fubini}}{=}$

$$= \int_0^k \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r\,d\theta \right) dr$$

$$= \frac{2\pi}{-2} \int_0^k -2r e^{-r^2}\,dr = \frac{2\pi}{-2}\left[e^{-r^2} \right]_0^k$$

$$= \pi\left(1 - e^{-k^2}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{B_k(0)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Notera att

$$Q_k := [-k,k]\times[-k,k].$$

$\{Q_k\}_k$ uttömmande svit till $\mathbb{R}^2$

$$\pi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\iint_{Q_k} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy}_{\int_{-k}^{k}\left(\int_{-k}^{k} \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{= e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}}\,dy\right)dx}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-k}^{k} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}\,dx = \sqrt{2\pi\sigma}\right)$$