MMS011 - Föreläsning 4.

$\dot{r}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$

$= \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{r}_d(t) \end{pmatrix}$

Def. Låt $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$t \longmapsto r(t) = \sum r_j(t) e_j = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_d(t) \end{pmatrix}$

Vi definierar

$$\gamma := \{ x : \; x = r(t) \, ; \, t \in [a,b] . \} .$$

Vi säger att γ är en reguljärt kurva om det finns

$r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ som uppfyller.

i) r är injektivt på $[a,b)$.

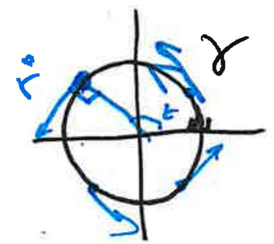
ii) r är deriverbar på $[a,b]$. ((a,b) och derivata i ändpunkter existeras som sidoderivata) $\boxed{r \in \mathcal{C}^1[a,b]}$

iii) $\dot{r}(t) \neq \vec{0}$

$\boxed{r \equiv \text{reguljärt parametrisering}}.$

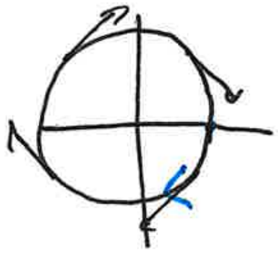
Exempel.

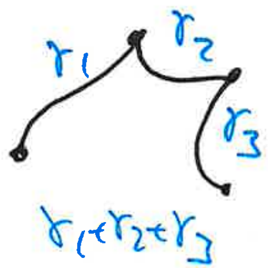
1) $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$



$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

2) $\begin{cases} x(t) = \cos -t \\ y(t) = \sin -t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$





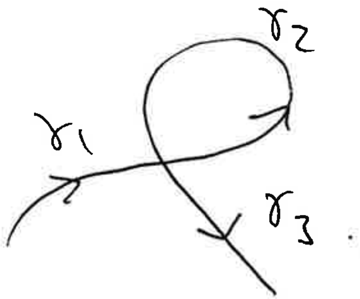
Def Låt $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ vara reguljära kurvor där slutpunkten av γ_j är begynnelsepunkt för γ_{j+1}. och de uppfyller att de skär inte varandra. förutom möjligtvis i ändpunkterna. Vi definerar

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_m$$

sammansättningen av kurvor. (γ är en styckvis reguljär kurva)

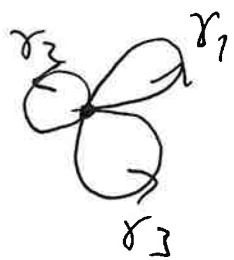
Vi säger att en kurva är enkel om varje ändpunkt ligger på högst två olika kurvor.

Om den sista slutpunkten är lika med den första begynnelsepunkten (dvs γ bildar en loop) vi säger att γ är en sluten kurva



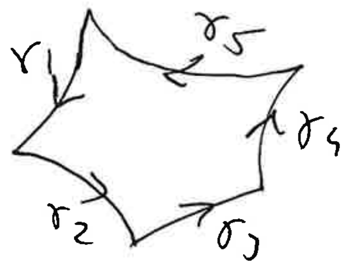
$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$

- Inte enkel
- Inte sluten.



$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$

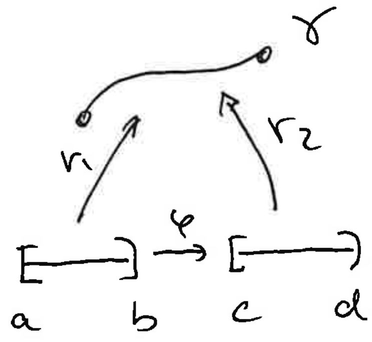
- Inte enkel
- sluten.



$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$

- enkel
- sluten.

En kurva kan ha olika parametriseringar, t. ex. r_1, r_2



Det går att visa att det finns

$$\varphi : [a,b] \longrightarrow [c,d].$$

$\varphi \in \mathcal{C}^1$ sådan att $\underline{\varphi'(t) > 0}$ eller $\underline{\varphi'(t) < 0}$ $\forall t \in (a,b)$

(φ är bijektivt)

och $r_1(t) = r_2(\varphi(t))$

$\varphi'(t) > 0 \Rightarrow \varphi$ växande och $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$

$\varphi'(t) < 0 \Rightarrow \varphi$ avtagande och $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$

Noterar att

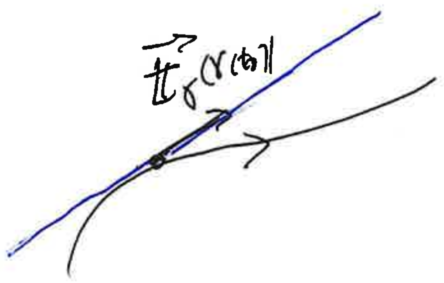
$$\frac{d}{dt} r_1(t) = \frac{dr_2}{ds}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)$$

Så är r_1 och r_2 parallella.

Vi definierar

$$\vec{T}_\gamma \triangleq \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}$$

tangentvektor till γ i punkten $r(t)$



$$T_{\gamma(t_0)}\gamma = \{ x \in \mathbb{R}^d : x = r(t_0) + \vec{t}_\gamma(\gamma(t_0)) \cdot (t-t_0) \quad t \in \mathbb{R} \}.$$

[Tangent till γ i punkten $\gamma(t_0)$]

$$\vec{t}_\gamma(r(t_0)) = \frac{\dot{r}(t_0)}{|\dot{r}(t_0)|}$$

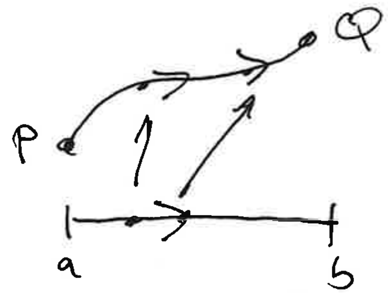
En reguljärt kurva γ har två ändpunkter, sägs P och Q

Parametrisering av γ ger en ordning till γ (genomloppsrikning)

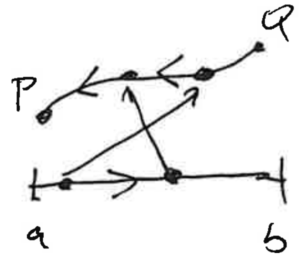
och så säger vi att γ är orienterat

$r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$

om $r(a) = P$ och $r(b) = Q$



om $r(a) = Q$ och $r(b) = P$



Om vi har orienterad kurva med startpunkt P och slutpunkt Q så betecknar vi $\boxed{-\gamma}$ den motsvarande kurva med omvänd orientering.

$$r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$t \longmapsto r(t)$$

$$r(a) = P$$
$$r(b) = Q$$

$$\tilde{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$s \longmapsto r(a+b-s) =: \tilde{r}(s)$$

$$\tilde{r}(a) = Q$$
$$\tilde{r}(b) = P.$$

Notera $\mathbb{E}_\gamma := \dfrac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}$ är oberoende av parametrisering som respekterar orientering (d.v.s om $\varphi'(s) > 0$)

Bevis

Om $t = \varphi(s)$ och $r(t) = r(\varphi(s)) = \tilde{r}(s)$

$$\frac{d}{ds} r(\varphi(s)) = \frac{dr}{dt}(\varphi(s)) \cdot \dot{\varphi}(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{dr}{ds}(r(\varphi(s)))}{\left|\frac{dr}{ds}(r(\varphi(s)))\right|} = \frac{\dot{r}(\varphi(s))}{|\dot{r}(\varphi(s))|} \cdot \frac{\dot{\varphi}(s)}{|\dot{\varphi}(s)|}$$

Så om $\dot{\varphi}(s) > 0$ gäller

$$\vec{T}_\gamma := \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|} = \frac{\dot{\tilde{r}}(s)}{|\dot{\tilde{r}}(s)|}$$

Notera att om $\dot{\varphi}(s) < 0$ gäller att ($\tilde{r}$ parametriserar $-\gamma$).

$$\left[\vec{T}_{-\gamma} = -\vec{T}_\gamma\right]$$

Kurvintegraler.

Om γ är en orienterad kurva och $f \in \mathcal{C}(\gamma, \mathbb{R})$

$r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ parametisering.

$t \longmapsto r(t)$

(som respectera orientationen)

så definierar vi kurvintegralen av f längds γ som

$$(*) \quad \int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(r(t)) \, |\dot{r}(t)| \, dt.$$

Notera: Kurvintegralen är oberoende av parametisering.

Om $t = \varphi(u)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1$ $\varphi'(t) \geq 0$ $(\varphi(c) = a, \varphi(d) = b)$ $\varphi : [c,d] \to [a,b]$

$$\int_a^b f(r(t)) \, |\dot{r}(t)| \, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{variabelbyte}}}{=} \left[t = \varphi(u) \right] = \int_c^d f(r(\varphi(u))) \underbrace{|\dot{r}(\varphi(u))| \, \dot{\varphi}(u)}_{\substack{\| \to \dot{\varphi} \geq 0 \\ \left| \frac{d}{du}(r(\varphi(u)) \right|}} du$$

Om $\varphi'(t)<0$ så gäller att

$$\varphi(c)=b \quad \varphi(d)=a. \qquad \varphi:[c,d]\longrightarrow[a,b].$$

$$\int_a^b f(r(t))\,|\dot r(t)|\,d = \left[t=\varphi(u)\right] = \int_d^c f(r(\varphi(u)))\,|\dot r(\varphi(u))|\,\dot\varphi(u)\,du$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Notera att}\\ \text{vi måste}\\ \text{ändra integralen}\end{array}\right] = \int_c^d f(r(\varphi(u)))\,|\dot r(\varphi(u))|\,\underbrace{(-1)\dot\varphi(u)}_{=\,|\dot\varphi(u)|}\,du$$

$\dot\varphi<0$

Varför definierar vi $\int_\gamma f\,ds$ som ☆?

"Längden av en lite bit av γ mellan punkterna $r(t)$ och $r(t+\Delta t)$, kan för lite Δ approximeras med $|r(t+\Delta t)-r(t)|\approx|\dot r(t)|\,\Delta t$.

$$=\left(\sum(\dot r_j(t))^2\right)^{\frac12}\Delta t.$$

Så

$$\int_\gamma f\,ds \approx \sum f(r(t_j))\,|r(t_j+\Delta t_j)-r(t_j)| \simeq \sum f(r(t_j))\,|\dot r(t_j)|\,\Delta t_j$$

$$\simeq \int_a^b f(r(t))\,|\dot r(t)|\,dt.$$

På så sätt, längden av kurva γ definieras som

$$L(\gamma) := \int_a^b 1 \cdot |\dot{r}(t)|\,dt$$

och vi har visat att det är oberoende av parametrisering.

Anmärkning:

Om vi definierar

(båglängden) $\quad s(u) := \int_a^u |\dot{r}(t)|\,dt \qquad s : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$, $\ u \mapsto s(u)$.

det gäller att $s \in \mathcal{C}^1[a,b]$ ($r \in \mathcal{C}^1$) och

$$s'(u) = |\dot{r}(u)| > 0 \quad \forall u \in (a,b)$$

Så är s strikt växande (så inverterbar och inversen är också derivabar. (som vi har sätt i Analys del A))

Så kan vi skriva

$$u = u(s) \qquad u : [0, L(\gamma)] \to [a,b], \quad s \mapsto u(s)$$

ger en nytt parametrisering. (som behöller orientering).

Om vi parametiserar våra kurvan med båglängden kan vi definiera

$$\vec{t}(s) = \frac{\dot{r}(s)}{|\dot{r}(s)|}$$ tangent vektor

$$\vec{n}(s) = \frac{\ddot{r}(s)}{|\ddot{r}(s)|}$$ normal vektor.

$$k(s) := |\ddot{r}(s)|$$ krökningen.

$$R(s) := \frac{1}{k(s)}$$ krökningen radie.

Exampel

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$ är en helix $t \in [0, 2\pi]$.

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$ $|\dot{r}(t)| = \sqrt{2}$. så båglängden parameter är

$$s = \int_0^t |\dot{r}(u)| du = \sqrt{2}\, t \Rightarrow t = s/\sqrt{2}$$

$$L(\gamma) = 2\pi\sqrt{2}$$

därför

$$\tilde{r}(s) = \begin{pmatrix} \cos s/\sqrt{2} \\ \sin s/\sqrt{2} \\ s/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \dot{r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin s/\sqrt{2} \\ \cos s/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s \in [0, 2\pi\sqrt{2}].$$

$$\ddot{r}(s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos s/\sqrt{2} \\ -\sin s/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\ddot{r}(s)| = \frac{1}{2}$$

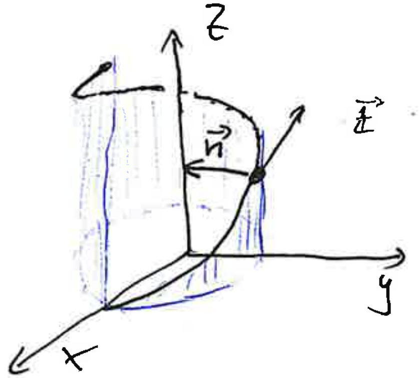
så

$$\vec{t} = \frac{\dot{r}(s)}{|\dot{r}(s)|} = \dot{r}(s)$$

$$\vec{n} = \frac{\ddot{r}(s)}{|\ddot{r}(s)|} = -\begin{pmatrix} \cos s/\sqrt{2} \\ \sin s/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ \kappa(s) = \frac{1}{2}$$

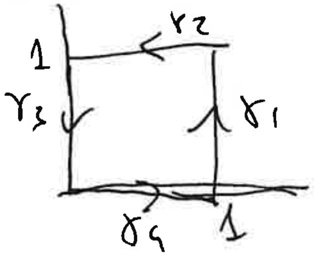
$$\cdot\ R(s) = 2$$



Om $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ styckvis reguljärt vi definierar

$$\int_\gamma f\,ds := \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f\,ds$$

Så om $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, gäller att $\displaystyle\int_\gamma f\,ds := \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f\,ds$.



Notera

$\gamma_1(t) = (1, t) \quad t \in [0,1]$.

$\gamma_2(t) = (1-t, 1) \quad t \in [0,1]$.

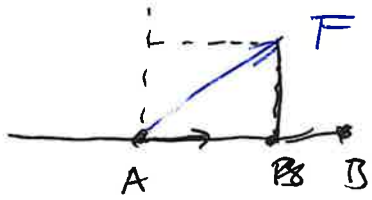
(eller $\gamma_2 = -\tilde{\gamma}_2(t) := (t, 1) \quad t \in [0,1]$)

$\gamma_3(t) = (0, 1-t) \quad t \in [0,1]$.

$\gamma_4(t) = (t, 0) \quad t \in [0,1]$.

Kurvintegraler av vektorfält.

I fysik är arbete kraften gånger sträckan. Så om F är en konstant kraftfält och det bildar vinkeln θ med marken, och vi vill dra ett föremål längs marken mellan punkter A till B.



F kan uttryckas som

$$F = P_{\langle e_1\rangle}F + P_{\langle e_1\rangle^\perp}F$$

där

$$P_{\langle e_1\rangle}F = (F\cdot e_1)e_1 = (|F|\cdot 1\cdot \cos\theta)e_1 .$$

Så storleken av projektionen av F i $\langle e_1\rangle$ är

$$|F|\cos\theta = (F\cdot e_1).$$

Eftersom föremålet dras mellan $AB = |AB|e_1$.

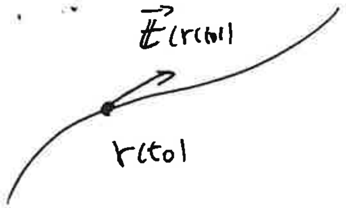
så blir arbetet

$$W = |F|\cos\theta\cdot|AB| = F\cdot\vec{AB}$$

(kontinuerlig)

Om vi har ett kraftfält F samt en orienterad kurva γ.
som ges av en parametrisering $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$$\vec{T}_\gamma(r(t_0)) := \frac{\dot{r}(t_0)}{|\dot{r}(t_0)|}$$ tangentvektorn till γ i punkten $r(t_0)$



Vi kan skriva $$F(r(t_0)) = \underbrace{P_{\langle \vec{T}_\gamma(r(t_0))\rangle} F}_{\text{Projektion av } F(t_0) \text{ i vektorrumet } \langle \vec{T}_\gamma(r(t_0))\rangle} + P_{\langle \vec{T}_\gamma(r(t_0))\rangle^\perp} F$$

skalarprodukt.

Så gäller att
$$P_{\langle \vec{T}_\gamma(r(t_0))\rangle} F = \left(F(r(t_0)) \cdot \vec{T}_\gamma(r(t_0))\right) \vec{T}_\gamma(r(t_0)) =$$

Så har vi en funktion
$$\left[\begin{array}{l} f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R} \\ p \longmapsto f(p) = F(p) \cdot \vec{T}_\gamma(p). \end{array}\right]$$

Vi har visat att det är oberoende av parametrisering av γ!

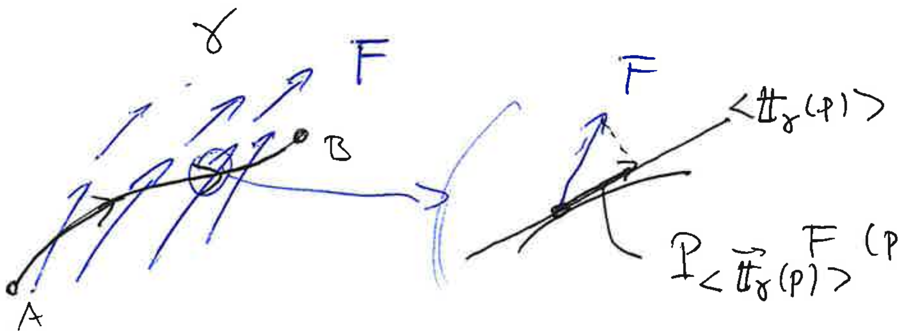
Så
$$\overbrace{\int_\gamma f\, ds} = \int_a^b F(r(s))\cdot \vec{T}_\gamma(r(s))\, |\dot{r}(s)|\, ds$$
$$= \int_a^b F(r(s))\cdot \frac{\dot{r}(s)}{|\dot{r}(s)|}\, |\dot{r}(s)|\, ds = \int_a^b F(r(s))\cdot \dot{r}(s)\, ds$$

Vi definierar
$$\int_\gamma F\cdot dr := \int_a^b F(r(s))\cdot \dot{r}(s)\, ds. \quad (*)$$

(kurvintegralen av vektorfältet F längs den orienterade kurvan γ parametriserad av $r(t)$)

- Vi har noterat att $\vec{T}_{-\gamma} = -\vec{T}_\gamma$. så gäller att
$$\boxed{\int_{-\gamma} F\cdot dr = -\int_\gamma F\cdot dr}$$

- Det är viktigt att notera att värdet av integralen $(*)$ är oberoende av parametrisering av γ.



$$P_{\langle \vec{T}_\gamma(p)\rangle} F(p) = \langle F(p)\cdot \vec{T}(p)\rangle\, \vec{T}(p) .$$

Så kan vi definiera

$$f(p) := F(p)\cdot \vec{T}(p) \qquad f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto f(p)$$

$$\int_\gamma f(p)\,ds = \int_a^b F(r(t))\cdot \frac{\dot{r}(r(t))}{\cancel{|\dot{r}(t)|}}\, \cancel{|\dot{r}(t)|}\,dt = \int_a^b F(r(t))\cdot \dot{r}(t)\,dt$$

$$\simeq \sum F(r(t_j))\cdot \dot{r}(t_j)\,\Delta t_j \simeq \sum \underbrace{F(r(t_j))\cdot\big(r(t_{j+1})-r(t_j)\big)}$$

Arbete av ~~kra~~ vektorkraft $F(r(t_j))$ i sträckan $[r(t_j), r(t_{j+1})]$

$F = (P, Q)$

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_\gamma (F \cdot \dot{r}) \, d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{r}(t) \, dt$$

$$= \left[\begin{array}{l} r = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \end{array} \right] = \int_a^b \left(P(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) \right) dt \, .$$

$$=: \int_\gamma (\underbrace{P \, dx + Q \, dy}_{\text{1-form.}})$$