MM5011 - Föreläsning 5

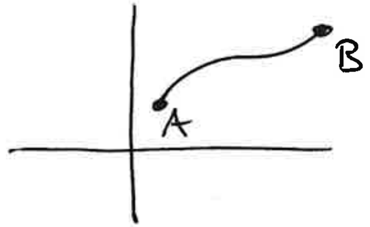
γ är en **reguljärt** kurva om det finns en (reguljärt) parametrisering

$[r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d]$ $[\gamma = \{ x : x = r(t) \quad t \in [a,b] \}.]$

i) r är injektivt på $[a,b)$

ii) $r \in \mathcal{C}^1([a,b])$

iii) $\frac{d}{dt} r(t) (= \dot{r}(t)) \neq \vec{0}$



Anmärkning. Givet $[c,d] \subset \mathbb{R}$, kan vi definiera.

$$\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b] \qquad \text{och} \qquad \tilde{r}(t) = r(\varphi(t))$$

$$t \longmapsto \frac{t-c}{d-c}(b-a) + a$$

så $\tilde{r}$ ge en ny parametrisering av γ.

Så vi kan alltid anta att alla våra kurvor har en parametrisering

$r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (med det samma bestämt intervall $[a,b]$)

γ har två ändpunkter (sägs A och B)

Om vi placerar dessa i en viss ordning, så t.ex. vi låt A vara startpunkt och B slutpunkt, så inför det en genomloppsriktning (kurvan genomlöps från A till B), så säger vi att γ är orienterad. Vi märker det med en pil

Om γ är en orienterad kurva (från A till B) vi betecknar med $-\gamma$ den kurvan med omvänd orientering (från B till A)

Om $r_1:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ är en parametrisering av γ (orienterade från A till B) måste uppfylles att

$$r(a)=A \text{ och } r(b)=B.$$

Om

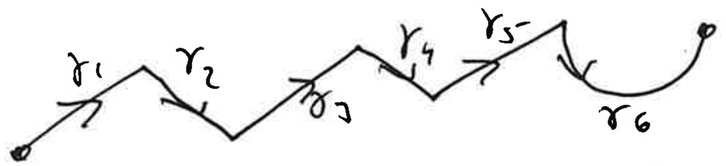
$$r_1(t)=r_2(\varphi(t)) \text{ (nytt parametrisering)}$$

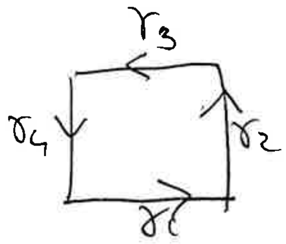
beskriver γ med det samma ordning måste $\varphi'(t)>0 \ \forall t$.

För en styckvis reguljärt kurva.

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n.$$

där γ_{i+1} har startpunkt den slutpunkt av γ_i får vi en orientering till γ.



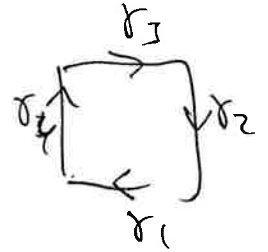


$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$

Och

$$-\gamma = (-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \dots + (-\gamma_n).$$

är den kurva med omvänd orientering.

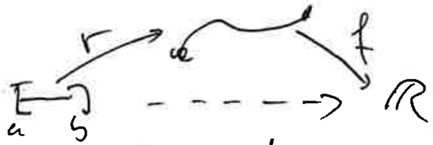


$-\Gamma$

Oberoende av parametrisering

Vi definierade (för γ reguljärt kurva)

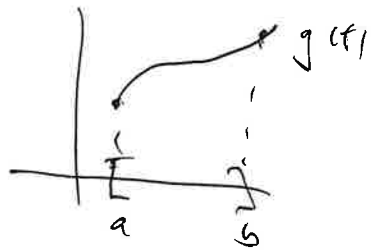
- $\forall f \in \mathscr{C}(\gamma)\mathbb{R} \quad \int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(r(t)) \, \overline{|\dot{r}(t)| \, dt}.$



Exempel $\dot{\gamma}(t) = (1, g'(t))^T$

Om $\gamma(t) = (t, g(t))^T \quad t \in [a,b]$ (graf av g)

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(t, g(t)) \sqrt{1 + |g'(t)|^2} \, dt$$



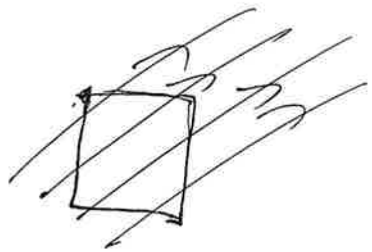
- Givet $F : \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \qquad F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_d(x) \end{pmatrix}$ vektorfält.

$\gamma \subset \Omega$

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \overbrace{\frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}}^{\vec{T}_\gamma(r(t))} |\dot{r}(t)| \, dt$$

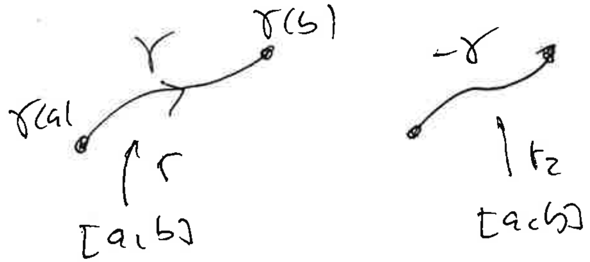
(kurvintegral av vektorfält F längs γ) $= \int_\gamma (F \cdot \vec{T}) \, ds.$

(oberoende av parametrisering)



Notera att

$$\int_{-\gamma} F\cdot dr = -\int_\gamma F\cdot dr$$



Om $r:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^d$, $t\longmapsto r(t)$ ge ett parametrisering för γ (mellan $r(a)$ och $r(b)$)

Så $r_2:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^d$, $t\longmapsto \cancel{a+b} \; r(a+b-t)=r_2(t)$ ge ett parametrisering av $-\gamma$

ty $r_2(a)=r(b)$ och $r_2(b)=r(a)$.

Dessutom

$$\dot r_2(t) = -\dot r(a+b-t)$$

Så

$$\int_{-\gamma} F\cdot dr = \int_a^b \underbrace{F(r_2(t))}_{F(r(a+b-t))}\cdot \underbrace{\dot r_2(t)}_{(-1)\dot r(a+b-t)}\,dt = \left[\begin{matrix}a+b-t=s\\ -dt=ds\end{matrix}\right] = -\int_b^a F(r(s))\cdot \dot r(s)\,(-1)\,ds.$$

$$= -\int_a^b F(r(s))\cdot \dot r(s)\,ds = -\int_\gamma F\cdot dr$$

Definiejar

$$dx_j : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto (dx_j)(v) = v_j \quad \text{(} = e_j^T v \text{)} \qquad v = \sum_{j=1}^{d} v_j e_j$$

Så en 1-form i en punkt p är den avbildning

$$\omega_p = \sum_{j=1}^{d} a_j(p)\, dx_j : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \omega_p(v) = \sum_{j=1}^{d} a_j(p) \overbrace{v_j}^{dx_j(v)} = \overbrace{(a_1, \dots, a_d)}^{a(p)^T} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}.$$
$$= a(p) \cdot v.$$

Så kan vi uttrycka.

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_a^b \Big(\sum_{j=1}^{d} \underbrace{F_j(\gamma(t))\, dx_j \Big)(\dot\gamma(t))}_{\sum_{j=1}^{d} F_j(\gamma(t))\, \dot\gamma_j(t)} \, dt =: \int_\gamma \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{d} F_j\, dx_j}_{\omega} \Big)$$

$\boxed{0\text{-form}}$

Example Om $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

$$df(x)(v) = \sum \underbrace{(df(x) e_j)}_{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)} \underbrace{v_j}_{dx_j(v)} = \Big(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \Big)(v).$$

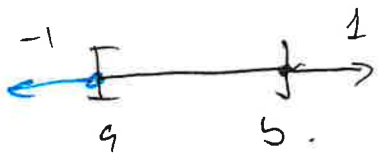
$$\boxed{df = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j} \longleftrightarrow \boxed{(df)^T =: \nabla f}$$

$$F = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix} \qquad F: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\})$$

$$(x,y) \longmapsto F(x,y)$$

$$\int_\gamma F\cdot d\gamma = \int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$\frac{dF}{dx} = f \qquad \int_{[a,b]} \frac{dF}{dt}\cdot dt = F(b)-F(a) = \int_{\partial[a,b]} F\cdot\vec{n}$$



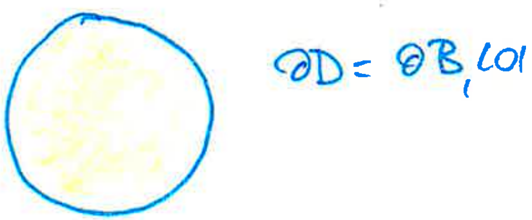
Greens formel.

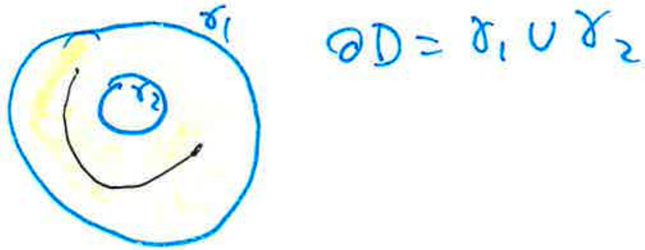
Vi säger att D är ett reguljärt område ~~över~~ på planet om.

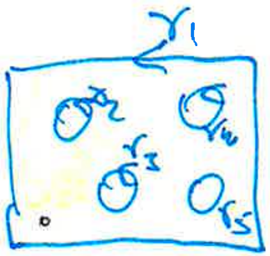
i) D är kompakt.

ii) D är sammanhängande. [$\forall x,y \in D\ \exists \gamma$ styckvis reguljärt kurva sådan att det börjar i x och slutar vid y]

iii) $\partial D = \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j$ (ändligt antal)
sådan att γ_j är styckvis reguljärt kurvor.
som skär inte varandra.

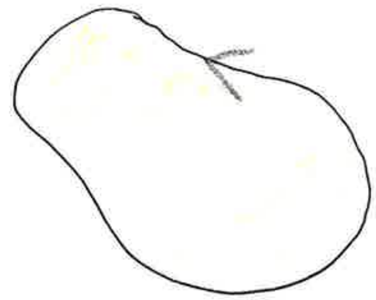






[Kolla boken för beviset]

Vi säger att ∂D är positivt orienterad om vi ger ∂D en genomloppsriktning sådan att D ligger till vänster av randen.

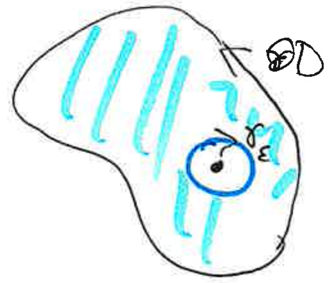


Sats Greens formel.

Låt D vara en reguljär området, positivt orienterad.
Låt Ω vara ett öppet mängd sådan att $D \subset \Omega$.
Låt $P, Q \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Så gäller.

$$\oint_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{\text{curl}} dx\,dy.$$

$$B = \overbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}^{P}\,dx + \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{Q}\,dy.$$



$$\frac{\partial}{\partial x} Q = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Om $(0,0) \notin D$. vi kan använda Green's satson för att få

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

Om $(0,0) \in \mathrm{Int}(D)$

Definiera $D_\varepsilon := D \setminus B_\varepsilon(0)$

$$\oint_{\partial D_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

$$\|$$

$$\left(\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy\right) + \left(\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy.\right)$$

Om: $\omega = P\,dx + Q\,dy$ uppfyller att $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = k$ konstant. $\forall (x,y) \in \Omega$.

$$\mathrm{Vol}_2(D)\cdot k = \oint_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

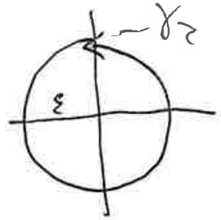
<u>Exempel</u>

- $P = 0$, $Q = x$ $\quad k = 1 \Rightarrow \mathrm{Vol}_2(D) = \oint_{\partial D} x\,dy.$

- $P = -y$, $Q = 0$ $\quad \mathrm{Vol}_2(D) = \oint_{\partial D} -y\,dx$

$$\mathrm{Vol}_2(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy.$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_{-\gamma_2} (P\,dx + Q\,dy)$$



$$(-\gamma_2)(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos t \\ \varepsilon \sin t \end{pmatrix} = \gamma(t) \qquad t \in (0, 2\pi)$$

$$\mathring{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \sin t \\ \varepsilon \cos t \end{pmatrix} \qquad x^2 + y^2 = |\gamma(t)|^2 = \varepsilon^2$$

$$\gamma \cdot \mathring{\gamma} = 0 \qquad (\gamma \cdot \gamma = \varepsilon^2)$$

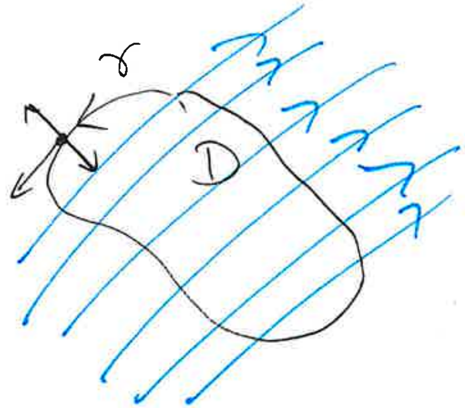
$$\int_{-\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-y(t)}{x^2+y^2} \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{x^2+y^2} \dot{y}(t) \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon \sin t}{\varepsilon^2} (-\varepsilon \sin t) + \frac{\varepsilon \cos t\,(\varepsilon \cos t)}{\varepsilon^2}\, dt = 2\pi$$

Så

$$\oint_{\partial D} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) = \begin{cases} 2\pi \cdot 1 & \text{om } (0,0) \in \mathrm{Int}(D) \\ 0 & \text{om } (0,0) \notin \cancel{\mathrm{Int}}\, D \end{cases}$$

Flodsintegral



Om $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ är en parametrisering av γ

$$\vec{T} = \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}$$ tangentvektor till γ vid $r(t)$.

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{N} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}}$$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $w = ?$ sådan att $v \circ w = 0$

$w = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ eller $w = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ är en positivt orienterad bas $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} > 0$.

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{vmatrix} = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 > 0$$

$$N = \frac{1}{|\dot{r}(t)|} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}$$

Vi definierar flödesintegral (flöde ut området D) som

$$\int_{\partial D} F \cdot \vec{N}\, ds = \int_a^b P(r(t)) \cdot \frac{\dot{y}(t)}{\cancel{|\dot{r}(t)|}} + Q(r(t)) \frac{(-\dot{x}(t))}{\cancel{|\dot{r}(t)|}} \cancel{|\dot{r}(t)|}\, dt$$

$$= \int_a^b \left(-Q(r(t))\, \dot{x}(t) + P(r(t))\, \dot{y}(t) \right) dt$$

$$= \int_{\partial D} -Q\, dx + P\, dy .$$

$$= \left[\text{Green sats} \right] = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial y}(-Q) \right) \right) dx\, dy .$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy .$$

Sats

Om $D \subset \Omega$ kompakt

sammanhängande.

∂D består av ändliga många

enkla, slutna kurvor som ej skär varandra.

Om ∂D är positivt orienterad

$\vec{T}$ är den tangent vektor

$\vec{N}$ är den yttre normalvektor (högernormal)

Om $F \in \mathcal{C}^1(\Omega \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vektorfält. Så gäller

$$\oint_{\partial D} F \cdot \vec{T}\, ds = \iint \underbrace{(\nabla \times F) \cdot e_3}_{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)} \, dx\,dy.$$

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ curl.

och

$$\oint_{\partial D} F \cdot \vec{N}\, ds = \iint \underbrace{(\nabla \cdot F)}_{=\,\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}} \, dx\,dy.$$

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ (Divergens)