MM5011-F06

Om D är kompakt
sammanhängande
∂D består av ändlig många
enkla slutna kurvor som
ej skär varandra
(∂D är en enkel styckvis-regul jär)

Om D är positivt orienterad
$F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$

$$\int_{\partial D} F \cdot \vec{T}\, ds = \iint_D \overbrace{(\nabla \times F) \cdot e_3}^{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}\, dx\, dy \quad \text{(Greens satsen)}$$

$$\int_{\partial D} F \cdot \vec{N}\, ds = \iint_D \underbrace{(\nabla \cdot F)}_{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}}\, dx\, dy \quad \text{(Divergenssatsen)}$$

$F = (P, Q)$

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differentierar i $x \in \Omega$.

$df(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linjär

$$v \longmapsto \underline{df(x) \cdot v} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{df(x) \cdot \vec{e}_j}_{\text{j kolon av } df(x)} \cdot \overbrace{v_j}^{(dx_j)(v)}$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, dx_j \right)(v).$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$m = 1$

$$df(x)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\nabla f(x)}_{\text{ett exempel av en vektorfält}}.$$

$$F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} F_j(x)\, e_j \longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} F_j(x)\, dx_j =: \omega$$

$$(F_1(x) \dots F_n(x)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Vektorfält $\longleftrightarrow$ 1-form.

$$\int_\gamma F \cdot \vec{T}\, \underline{ds} = \int_a^b F(r(t)) \cdot \frac{\dot{r}(t)}{\cancel{|\dot{r}(t)|}} \cancel{|\dot{r}(t)|}\, dt$$

tangent vektor av längden 1

$$= \int_a^b F(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left(P(r(t))\, \dot{x}(t) + Q(r(t))\, \dot{y}(t) \right) dt$$

$F = (P, Q)$

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy =: \int_\gamma F \cdot d\vec{r}$$

Def. Vektorfältet $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ kallas potentialfält (konservativt) fält i det öppna området Ω. om $\exists\, U \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ sådan att

$$\nabla U = F.$$

$F = (P, Q)$

U kallas potential.

Def. Defferentialformen $P\,dx + Q\,dy = \omega_F$ är <u>exakt</u> i Ω.

om $\exists\, U \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ sådan att

$$dU = P\,dx + Q\,dy.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = P \text{ och } \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla U = F \text{ där } F = (P, Q)$$

$\Leftrightarrow$ F är konservativt.

Notera att om $\exists\, U$ potential till F, så är det $U + k$ där k är en konstant.

Om u och V är potentialer till F och Ω är en sammanhängande området

$$\nabla(u-V) = \nabla u - \nabla V = F - F = 0 \xrightarrow[\Omega]{} u = V + k \quad \text{för något } k \in \mathbb{R}.$$

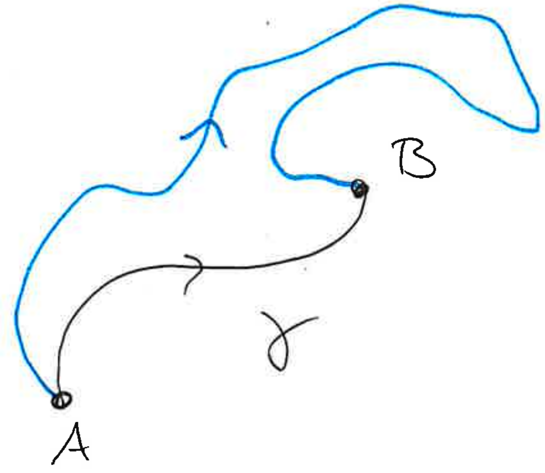
Sats.

Om $\nabla u = F$ i Ω.

För varje kurva γ i F ~~gäll~~ gäller då att

$$\int_\gamma F \cdot dr = u(B) - u(A)$$

där A är begynnelse
B är slutpunkt för γ



Bevis.

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_a^b \underbrace{\underbrace{F(r(t))}_{(\nabla u)(r(t))} \cdot \dot r(t)}_{\frac{d}{dt}(u(r(t))) = (du)(r(t))\,\dot r(t)}\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\big(u(r(t))\big)\, dt = u(r(t))\Big|_a^b$$

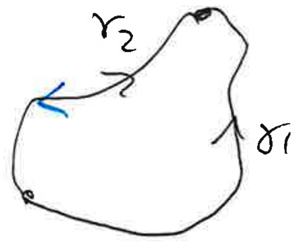
$$= u(\underset{r(b)}{B}) - u(\underset{r(a)}{A}).$$

Def. Vi säger att vektorfält $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är vägoberoende i Ω om

$\forall \gamma_1, \gamma_2$ kurvor med det samma begynnelse- och slutpunkten.

gäller att

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr.$$



$\Leftrightarrow \forall \gamma$ sluten kurva

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = 0.$$

Följdsats. Om F är konservativ i Ω så är F vägoberoende.

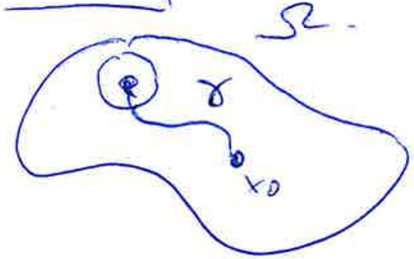
Sats. Låt $F \in \mathscr{C}(\Omega)$ vektorfält. $F = (P, Q)$

Ω är bågvis sammanhängande.

Om F är vägoberoende så är F konservativt.

$(\exists U : \nabla U = F)$

Bevis:



Låt $X_0 = (a, b) \in \Omega$.

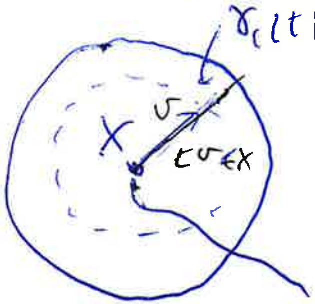
$$U(X) := \int_\gamma P\,dx + Q\,dy \left(= \int_\gamma F \cdot dr \right)$$

där γ är en kurva som börjar i x_0 och slutar i $X \in \Omega$.

$\exists r > 0 : B_{2r}(X) \subset \Omega$.

$\gamma_1(h) = x + hv$

Givet $v : \|v\|_2 = 1$ definierar $[\gamma_1(t) = x + tv]$ i $t \le r$



$$U(x + hv) - U(x) = \int_{\gamma_1 + \gamma} P\,dx + Q\,dy - \int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

Så

$$u(x+hv)-u(x) = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \left[\begin{matrix} \gamma_1(t) = x + tv \\ t \in [0, h] \end{matrix}\right] = \left(\int_0^h P(x+tv)\,dt\right) v_1 + \left(\int_0^h Q(x+tv)\,dt\right) v_2 .$$

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Så gäller att

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+hv)-u(x)}{h} = P(x)v_1 + Q(x)v_2 = (P(x), Q(x)) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Analysens huvudsatsen.

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x) = (P(x), Q(x)) \cdot v \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x) = P(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x) = Q(x)$$

#

(P, Q)

Sats. Om $F \in C^1(\Omega)$ och "F" är en potentialfält så gäller att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Bevis. ~~Det är~~ om $F = \nabla u. \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \end{array}\right] = \quad (\text{Schwarz sats}).$$

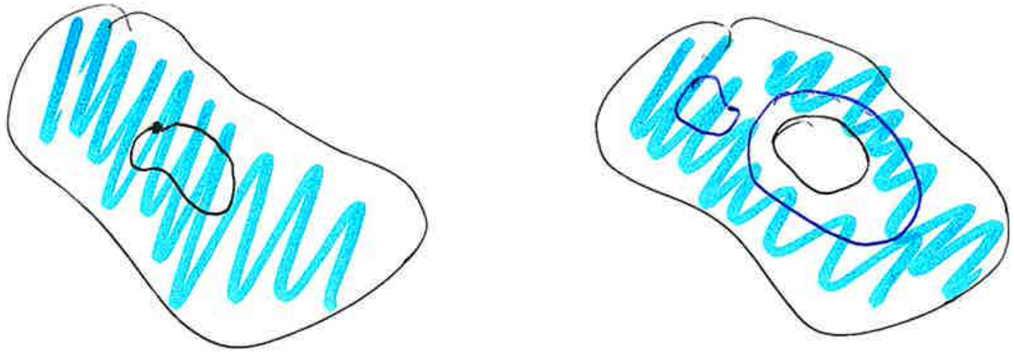
#

Anmärkning Villkoret är inte tillräckligt.

$$B = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Def Ett öppet mängd Ω är <u>enkelt</u> sammanhängande om varje enkel sluten kurva $\gamma \subset \Omega$ avgränsar ett område ($\mathrm{Int}\,\gamma$) som helst och hållet består av punkter i Ω.



Sats.

Om $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ $\left(F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right)$

$F = P\,dx + Q\,dy$ och uppfyller villkoret

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\left(dF = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \right)$$

och Ω är enkel sammanhängande öppet mängd.

Så har F en Potential i Ω.

Bevis. Vi kan klara om vi visat att F är vägoberoende i Ω.

$\Longleftrightarrow$ $\forall \gamma \subset \Omega$ slutna enkla kurva $\int_\gamma F \cdot d\bar{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$.

Om $\gamma \subset \Omega$ är en godtyckligt sluten enkla kurva.

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Green} \\ \text{sats}}}{=} \iint_{\mathrm{Int}\,\gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0.$$

#

$F = (y+2x)dx + x\,dy.$

Är det konservativt?

- $dF = \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(y+2x)}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$

- Om F är konservativt gäller

$$F = \nabla u \Leftrightarrow F = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Antag att u uppfyller det.

Om $\frac{\partial u}{\partial y} = x \Rightarrow u(x,y) = xy + c(x)$

$$\underset{\nabla u = F}{\Rightarrow} \frac{\partial u}{\partial x} = y + c'(x) = y+2x \Rightarrow c'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow c(x) = 2x + k.$$

Så

$$\boxed{u(x,y) = xy + 2x + k}$$

$$E = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy .$$

Om det finns u : $\nabla u = E$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow c'(y) = 0$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + k}$$