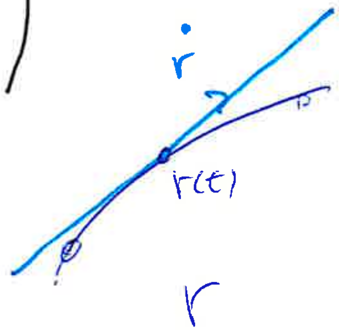
MM5011-F07

En mängd $\gamma \subset \mathbb{R}^k$ är en reguljärt kurva om det är värdemängden till en funktion

$$r : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k \qquad r(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$



sådan

i) r är injektivt på (a,b)

ii) $r \in \mathcal{C}^1((a,b))$ och $r, \dot r \in \mathcal{C}([a,b])$

iii) $\dot r \neq \vec{0} \iff$ "matrisen" $\begin{pmatrix} \dot x_1(t) \\ \vdots \\ \dot x_k(t) \end{pmatrix}$ har rang 1.

Vektorrummet $\langle \dot r(t) \rangle = T_{r(t)}\gamma$ kallas tangentrum till γ i $r(t)$.

Så linjen

$$s \longmapsto r(t) + \dot r(t)\, s$$

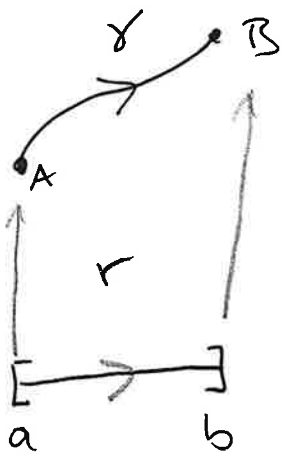
är tangent till kurvan i punkten $r(t)$

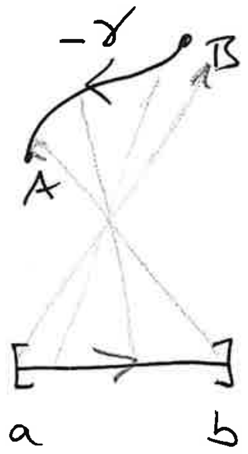
Den enhetstangent till kurvan i punkten $r(t)$ definieras som

$$\mathbb{T}(t) := \frac{\dot r(t)}{|\dot r(t)|}$$

En ~~reguljär~~ kurva (kurvstycke) har två ändpunkter. A och B.

Vi säger att γ är orienterad om vi sätt dem i en viss ordning.





T.ex. A startpunkt
B slutpunkt.

Det ger en genomloppsriktning för kurva.

Notera "Randen" av γ är.

$$\partial\gamma = \{A\} \cup \{B\}.$$
$$= \{r(a)\} \cup \{r(b)\}.$$
$$= r(\partial[a,b]).$$

(Det är inte den "topologisk" rand som delmängd av $\mathbb{R}^k$)

Betrakta $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ · reguljära kurvor där

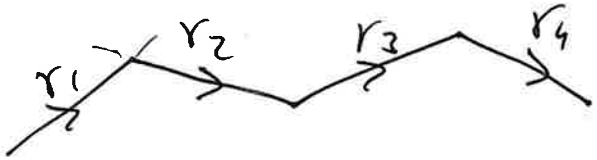
slutpunkter av γ_j är begynnelsepunkt för γ_{j+1}

och dem skär inte varandra förutom möjligtvis ändpunkterna.

Vi definerar

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$$

sammasättningen av kurvor. (styckvis reguljär kurva)



$$\int_\Gamma f\, ds := \sum_j \int_{\gamma_j} f \cdot ds$$

$$\int_{\gamma_j} f\, ds = \int_a^b f(r_j(t)) \cdot |\dot{r}_j(t)|\, dt.$$

om $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$

Anmärkning.

Varje delkurva γ_j har en enhettangent. $\mathbb{t}_j$

Så, om $f = 1$

$$\text{längden}(\Gamma) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b |\dot{r}_j(t)|\, dt.$$

$F : \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ är en potentialfält (konservativ) i Ω $\quad F \in \mathcal{C}^1$

om $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ $(\mathcal{U} : \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R})$

$$\nabla \mathcal{U} = F$$

$\iff$ Differentialformen

$$\omega_F = \sum_{j=1}^{k} F_j \, dx_j \qquad \left(\sum F^j \, dx_j\right)$$

är exakt d.v.s.

$\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{C}^1(\Omega) : \quad d\mathcal{U} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_j} dx_j = \omega_F \quad \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_j} = F_j \right)$

$\iff$ För varje sluten kurva γ

$$\int_\gamma F \cdot \mathbb{T} \, ds = 0$$

$\boxed{\Omega \text{ bågvis sammanhängande}}$

[Argument som vi gav passar i flera dimensioner]

$\implies \forall\, 1 \le j < l \le k \quad \frac{\partial F^l}{\partial x_j} - \frac{\partial F^j}{\partial x_l} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega. \quad \left(\frac{\partial F^2}{\partial x_1} - \frac{\partial F^1}{\partial x_2} = 0 \right)$

[$k=2$, Ω enkel sammanhängande
$\Longleftarrow$ Vi använde Greens sats]

Antag att $D \subset \mathbb{R}^2$ är reguljärt:

- D är kompakt.
- D är sammanhängande.
- ∂D består av ändliga många enkla slutna kurvor. (styckvis reguljär) som ej skär varandra.

$D = [a, b]$.

$\partial D = \{a\} \cup \{b\}$.

Def. En mängd $M \subset \mathbb{R}^k$ kallas ett reguljärt ytstycke (yta) om M är värdemängden till en funktion

$$r : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad (\text{konti} \qquad r = r(s,t))$$

$(k \geq 2)$

sådan att

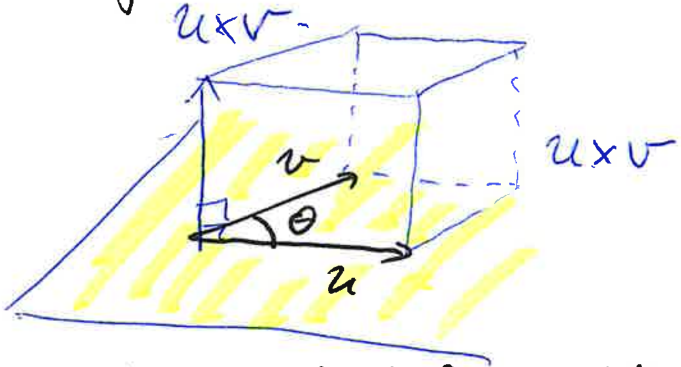
i) $\bar{\Omega}$ är ett reguljärt området (Ω öppet).

ii) r är injektivt på Ω. ($\Omega \simeq r(\Omega)$)

iii) $r \in C^1(\Omega)$, $r, dr \in C(\bar{\Omega})$.

iv) $\operatorname{rang}(dr) = \operatorname{rang}\left(\left(\underbrace{\frac{\partial r}{\partial s}}_{1} \Bigg| \underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{1} \right) \updownarrow k \right) = 2 \quad \forall (s,t) \in \Omega.$

dvs $\frac{\partial r}{\partial s}(s,t), \frac{\partial r}{\partial t}(s,t)$ är linjärt oberoende $\forall (s,t) \in \Omega$.



Låt $u, v \in \mathbb{R}^3$

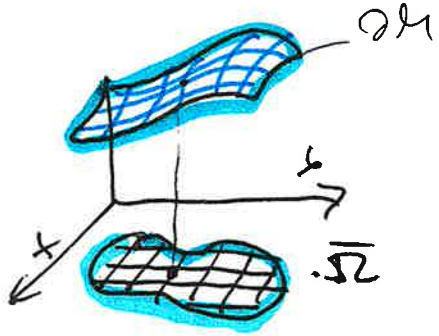
u, v är linjärt oberoende

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & u_1 & v_1 \\ e_2 & u_2 & v_2 \\ e_2 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3 . \\ \\ |u \times v| = |u||v| \sin\theta \end{array} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad u \times v \neq \vec{0}$$

$$\underset{(\text{Om } k=3)}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\partial r}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial r}{\partial t}(s,t) \neq \vec{0} \quad \forall (s,t) \in \Omega .$$

Def. Mängden $\partial M := r(\partial \Omega)$ kallas randen av M.



Man definiera tangentrum till ytan M i punkten $r(s,t)$ som

$$T_{r(s,t)}M = \left\langle \frac{\partial r}{\partial s}(s,t), \frac{\partial r}{\partial t}(s,t) \right\rangle .$$

Så planet

$$(\alpha,\beta) \longmapsto r(s,t) + \alpha \frac{\partial r}{\partial s}(s,t) + \beta \frac{\partial r}{\partial t}(s,t) = \varphi(\alpha,\beta)$$

är tangentplanet till ytan M i punkten $r(s,t)$)

I fallet där $k=3$, vektorn $\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}$ är vinkelrätt till $T_{r(s,t)}M$. Man definiera den enhetsnormalvektor till ytan M i punkten $r(s,t)$ som.

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}}{\left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right|}$$

Exempel (Graf av en funktion g) $\quad g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$

$$\varphi(s,t) = (s, t, g(s,t))^T$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix}$$

Notera att

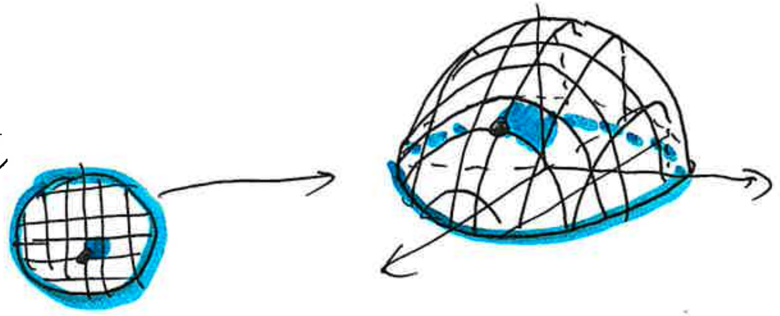
$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \cdots = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial s} \\ -\frac{\partial g}{\partial t} \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\varphi_+ : \overline{\Omega} = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(s,t) \longmapsto (s, t, \underbrace{\sqrt{1-s^2-t^2}}_{g(s,t)})$$

$$\left[\vec{n} = \begin{pmatrix} -s \\ -t \\ \sqrt{1-s^2-t^2} \end{pmatrix} \right] \neq \vec{0}$$

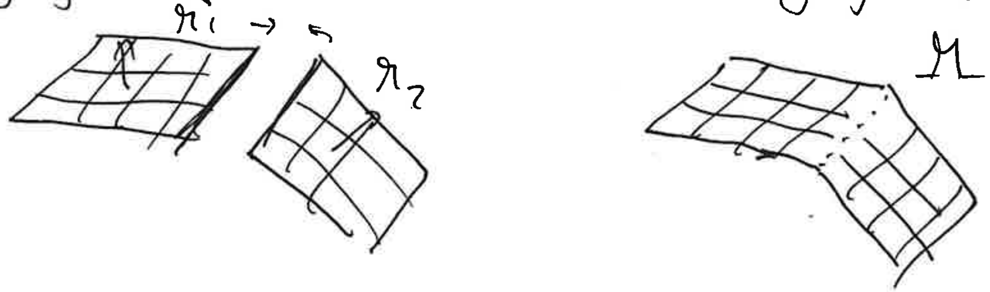
$\overline{\Omega}$



$\varphi_- : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

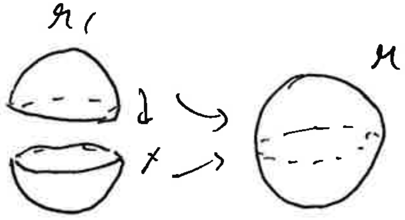
$(s,t) \longmapsto (s, t, -\sqrt{1-s^2-t^2}$

Vi kan bilda en sammansatt yta genom att klistra ihopp ändliga reguljära ytstycken (styckvis reguljär yta)

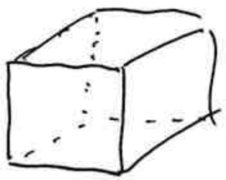


Gemensamma skärningskurvorna räknas inte in i randen av M

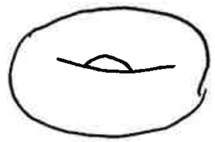
Def En yta är <u>sluten</u> om det saknas rand.



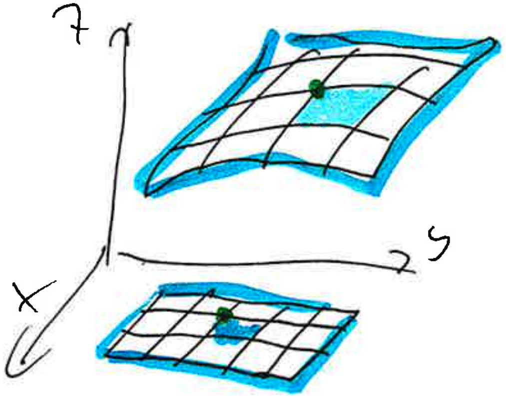
$[\partial r_1 = \partial r_2 = \Sigma_1.]$ $\partial r = \emptyset$

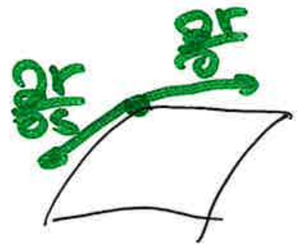


$\partial r = \emptyset$



$\partial r = \emptyset$





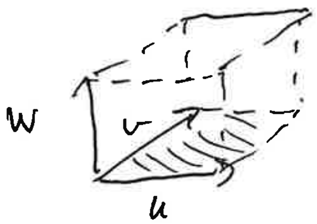
Vi kan approximera "arean" över ytan. med den area av parallellogram.

$$P_0 = \left\{ z = \alpha \frac{\partial r}{\partial s}(x_0) + \beta \frac{\partial r}{\partial t}(x_0) \; ; \; \begin{array}{l} \alpha \in [0, \Delta s] \\ \beta \in [0, \Delta t] \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^k .$$

~~Anm~~ Om u, v är två linjära oberoende vektorer i $\mathbb{R}^k$.
Vi vill beräkna arean av.

$$P(u,v) = \{ z = \alpha u + \beta v \; ; \; \alpha \in [0, \Delta s], \; \beta \in [0, \Delta t]. \}.$$

$\boxed{k=3}$



$$\left. \begin{array}{l} w \perp u \\ w \perp v \\ |w| = 1 \end{array} \right\}$$

~~om~~ Den area är lika med volymen av.

$$P(u,v,w) = \left\{ z = \alpha u + \beta v + \gamma w : \begin{array}{l} \alpha \in [0, \Delta s] \\ \beta \in [0, \Delta t] \\ \gamma \in [0, 1] \end{array} \right\}.$$

Så

$$\mathrm{Vol}_3(\mathcal{P}(u,v,w)) = \Big|\det(\underbrace{\underbrace{u\,|\,v}_{A}\,|\,w}_{B})\Big| \quad \text{As } \Delta t.\ 1$$

$$|w|=1 \qquad w^T w = 1$$

$$|\det B| = \sqrt{\det(B^T B)} =$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} A^T \\ w^T \end{pmatrix} (A \ w) = \begin{pmatrix} A^T A & A^T w \\ w^T A & w^T w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$w^T(u\,|\,v)$$

Gram matris.

$$|\det B| = \sqrt{\det(A^T A)}$$

$$= \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix}(u, v)\right)} = \sqrt{\det\underbrace{\begin{pmatrix} u^T u & u^T v \\ v^T u & v^T v \end{pmatrix}}}$$

$$= \sqrt{|u|^2|v|^2 - (u^T v)^2} \underset{\uparrow}{=} |u||v|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \underbrace{|u||v||\sin\theta|}_{\text{om } n=3}$$

$$u^T v = |u||v|\cos\theta \qquad\qquad |u\times v|$$

θ vinkeln mellan u och v.

Om $k \geq 4$.

kan skaffa $w_1, \ldots, w_{k-2}$ olika vektorer sådan ~~a~~ att

$$w_j \perp w_k \quad j \neq k$$

$$|w_j| = 1$$

$$w_j \perp u$$

$$w_j \perp v.$$

~~det~~ $\left[\mathrm{Vol}_2(P(u,v)) = \sqrt{|u|^2|v|^2 - (u^T v)^2} \quad \Delta s \Delta t. \right]$

$$\operatorname{Area}(R_0) = \overbrace{\sqrt{\left|\frac{\partial r}{\partial s}(x_0)\right|^2 \left|\frac{\partial r}{\partial t}(x_0)\right|^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial s}(x_0) \cdot \frac{\partial r}{\partial t}(x_0)\right)^2}}^{A(x_0)} \quad \Delta s \Delta t$$

$$\underset{k=3}{=} \left| \frac{\partial r}{\partial s}(x_0) \times \frac{\partial r}{\partial t}(x_0) \right| \Delta s \Delta t$$

Givet $f \in \mathcal{C}(r(\bar{\Omega}))$ definieras

$$\int_{r(\Omega)} f \, dS := \iint_\Omega f(r(s,t))\, A(r(s,t))\, ds\,dt$$

$$\underset{k=3}{\overset{=}{\uparrow}} \iint_\Omega f(r(s,t)) \left| \frac{\partial r}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial r}{\partial t}(s,t) \right| ds\,dt.$$

Om $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \mathcal{Y}_m$ är en styckvis reguljär yta.

definieras

$$\int_{\mathcal{Y}} f \, dS = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{Y}_j} f \, dS.$$

I fallet där $r(\Omega) = \text{graf}(g)$.

$$\int_{\text{graf}(g)} f \, dS = \iint_\Omega f(s,t,g(s,t)) \sqrt{1 + |\nabla g(s,t)|^2} \, ds\,dt.$$