MM 50 11- F 08

$\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ är en yta om $\exists r : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ $\quad r \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $D = \bar{\Omega}$

i) D är reguljärt området $(D = \bar{\Omega})$

- kompakt
- D sammanhängande
- ∂D består av ändliga många enkla slutna kurvor (som ej skär varandra)

ii) r är injektivt på Ω $\quad (\Gamma = r(D))$

iii) $r \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $r \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ och $dr \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$

iv) $\operatorname{rang}(dr(x)) = 2 \quad \forall x \in \Omega$

$\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial r}{\partial s}(s,t)$, $\frac{\partial r}{\partial t}(s,t)$ är linjärt oberoende $\forall (s,t) \in \Omega$.

$\overset{k=3}{\Longleftrightarrow}$ $\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \neq \vec{0}$

Mängden $\partial\Gamma = r(\partial\Omega)$ kallas randen av Γ.

Vi kan bilda en sammansatt yta genom av klistra ihop ändliga reguljära ytstycken.

Gemensamma skärningskurvorna räknas inte in i randen

$$\partial S_+ = \partial S_- = \Sigma_1$$

$$\partial(S_+ \cup S_-) = \emptyset$$
$$\parallel$$
$$\partial(\Sigma_2)$$

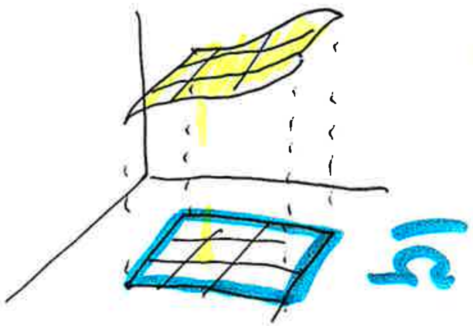
Om

$$r(s,t) = (s, t, g(s,t))^T \quad \text{med } g \in \mathcal{C}^1($$

ytan

$$\{(x,y,z) : (x,y,z) = r(s,t);\ (s,t) \in \overline{\Omega}\} = \mathcal{G}(g)$$

är grafen av funktionen g.



Enhetsnormalvektorn till ytan i punkten $r(s,t)$ är

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}}{\left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right|}$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial s} \\ -\frac{\partial g}{\partial t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g(s,t)|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) \\ -\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi visade också att det är naturlig att definiera

för $f \in \mathcal{C}(r(\bar{\Omega}))$

$$\iint_{r(\Omega)} f \, dS = \iint_{\Omega} f(r(s,t)) \underbrace{\sqrt{\det \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|^2 & \frac{\partial r}{\partial t}^T \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \\ \frac{\partial r}{\partial s}^T \cdot \frac{\partial r}{\partial t} & \left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|^2 \end{pmatrix}} \, ds\, dt}_{A(s,t)\, ds\, dt}$$

$$\underset{\text{om } k=3}{=} \iint_{\Omega} f(r(s,t)) \left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right| ds\, dt$$

I fallet där $r(\Omega) = \text{graf}(g)$

$$= \iint_{\Omega} f(r(s,t)) \sqrt{1 + |\nabla g(s,t)|^2} \, ds\, dt.$$

$$\text{Area}(r(\Omega)) = \int_{r(\Omega)} 1 \cdot dS$$

Anmärkning.

Om $k=2$ $\quad \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\partial r}{\partial t} \end{pmatrix}}^{\text{Jakobian matris.}} = B$ är en 2×2 matris

sådan att

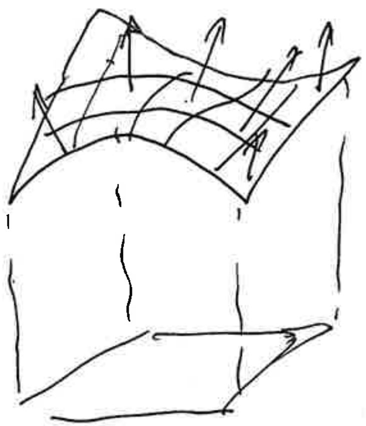
$$B^T B = \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|^2 & \frac{\partial r}{\partial s}^T \frac{\partial r}{\partial t} \\ \frac{\partial r}{\partial s}^T \frac{\partial r}{\partial t} & \left|\frac{\partial r}{\partial t}\right|^2 \end{pmatrix}$$

Så

$$\ldots A(s,t) = \sqrt{\det(B^T)\det(B)} = |\det(B)| =$$

Så formel vi visade reduceras till satsen om variabelbyte.

Ett ytstycke är orienterbar om det finns ett enhetervektorfält N som är vinkelrätt mot ytan. som varierar kontinuerlig



Vi kallar den sida som N pekar för den positiva sidan av ytan.

Anmärkning.

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial r}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial r}{\partial t}(s,t)}{\left|\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}\right|} \in C$$

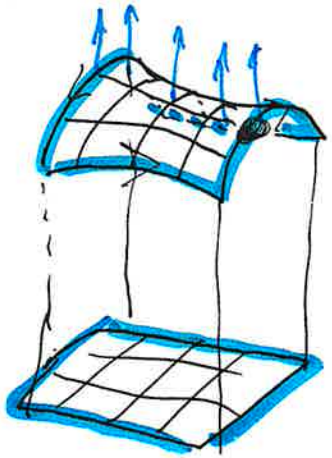
$r \in C^1$

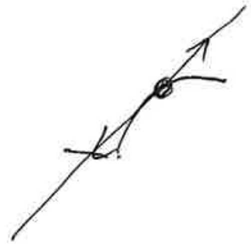
Notera

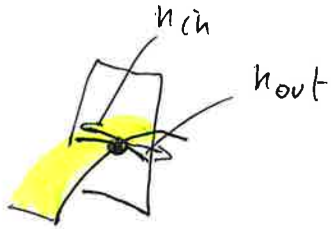
$$\frac{\partial r}{\partial t} \times \frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}$$

Om Γ ges av en parametrisering r, vektorn $\vec{n}$ är en kontinuerlig enhetsvektorfält.

Givet en orienterade yta Γ med normal $\vec{N}$







Vi säger att $\partial\Gamma$ är positivt orienterad om

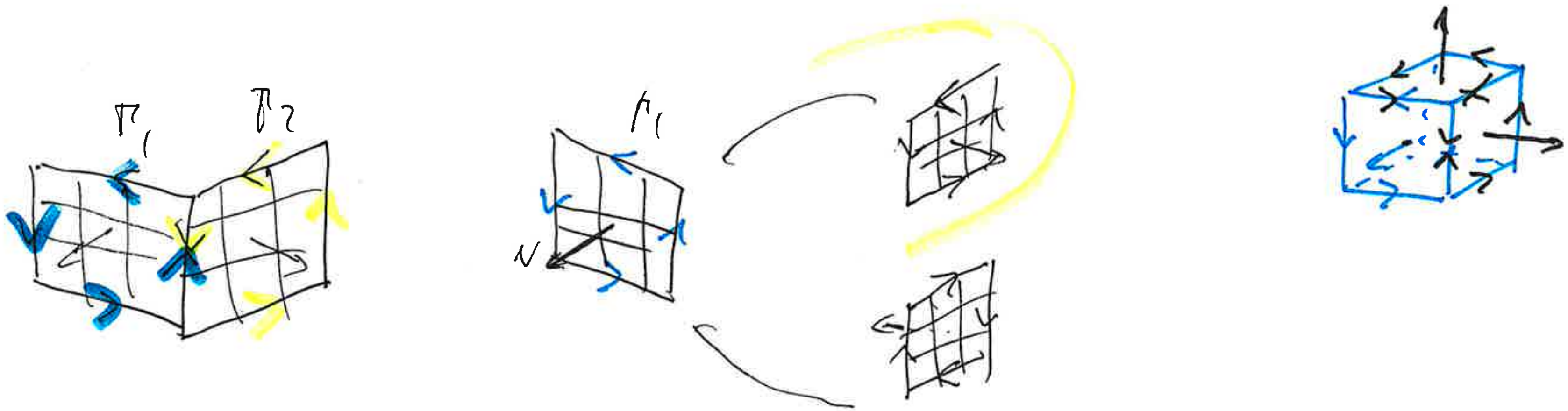
$\vec{t}$, $\vec{n}_{in}$ och $\vec{N}$

är en positivt orienterade bas.

($\vec{n}_{in}$ = "inrenormal")

Så om vi går längs randen (sett från spetsen av $\vec{N}$) hela tiden har vi ytan till vänster.

För en styckvis reguljär ytan väljer vi en orientering.



Om Γ_1, Γ_2 är ytstyckerna med positivt orienterade rand. den gemensama skärningskurva måste ha olika orienteringar med avseende på Γ_1 och Γ_2.

Sats. (Greens sats)

Om $D \subset \Omega$ ~~kompakt~~ reguljärt området på planet

∂D positivt orienterade.

$F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ $\quad F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = F$

$$\int_{\partial D} F \cdot \vec{t} \, ds = \iint_D (\nabla \times F) \cdot e_3 \, dx\,dy .$$

och

$$\int_{\partial D} F \cdot \vec{N} \, ds = \iint_D \underbrace{(\nabla \cdot F)}_{\operatorname{div}(F)} \, dx\,dy .$$

där

$F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ $\quad \nabla \cdot F = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$

Om Γ är en styckvis reguljär orienterad yta, och F är en vektorfält ~~ka~~ definerar vi flödintegralen

$$\iint_\Gamma F\cdot N\, dS = \iint_\Omega F(r(s,t))\bullet \frac{\frac{\partial r}{\partial s}\times\frac{\partial r}{\partial t}}{\cancel{\left|\frac{\partial r}{\partial s}\times\frac{\partial r}{\partial t}\right|}}\ \cancel{\left|\frac{\partial r}{\partial s}\times\frac{\partial r}{\partial t}\right|}\, ds\,dt$$

$$= \iint_\Omega F(r(s,t))\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial s}\times\frac{\partial r}{\partial t}\right)\, ds\,dt.$$

Om $\Gamma = \Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_m$ styckvis reguljär orienterad yta.

definera vi

$$\iint_\Gamma F\cdot N\, dS := \sum_{j=1}^{m}\iint_{\Gamma_j} F\cdot N\, dS.$$

Anmärkning.

$$F(r(s,t))\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial s}\times\frac{\partial r}{\partial t}\right)$$

$$= \det\begin{vmatrix} F_1(r(s,t)) & \frac{\partial r_1}{\partial s} & \frac{\partial r_1}{\partial t}\\ F_2(r(s,t)) & \frac{\partial r_2}{\partial s} & \frac{\partial r_2}{\partial t}\\ F_3(r(s,t)) & \frac{\partial r_3}{\partial s} & \frac{\partial r_3}{\partial t}\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$

$$u\cdot(v\times w) = \det\begin{pmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{pmatrix}$$

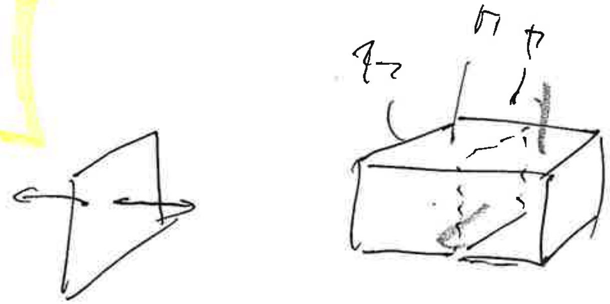
$$\det\begin{vmatrix} e_1 & v_1 & w_1\\ e_2 & v_2 & w_2\\ e_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix}$$

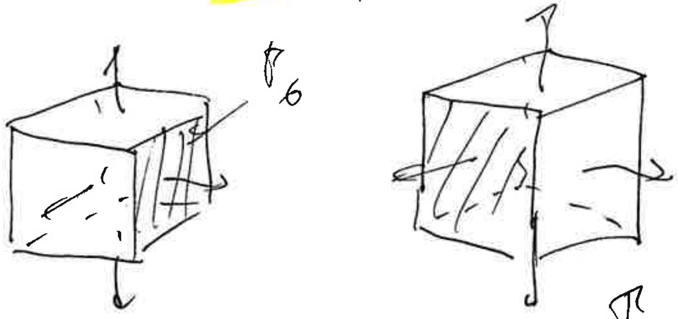
$$e_1\cdot\begin{vmatrix}v_2 & w_2\\ v_3 & w_3\end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix}v_1 & w_1\\ v_3 & w_3\end{vmatrix}$$

$$+ e_3\begin{vmatrix}v_1 & w_1\\ v_2 & w_2\end{vmatrix}$$

Om vi orienterar Γ mod den motstående orientation kan vi betecknar det som $-\Gamma$. Så gäller

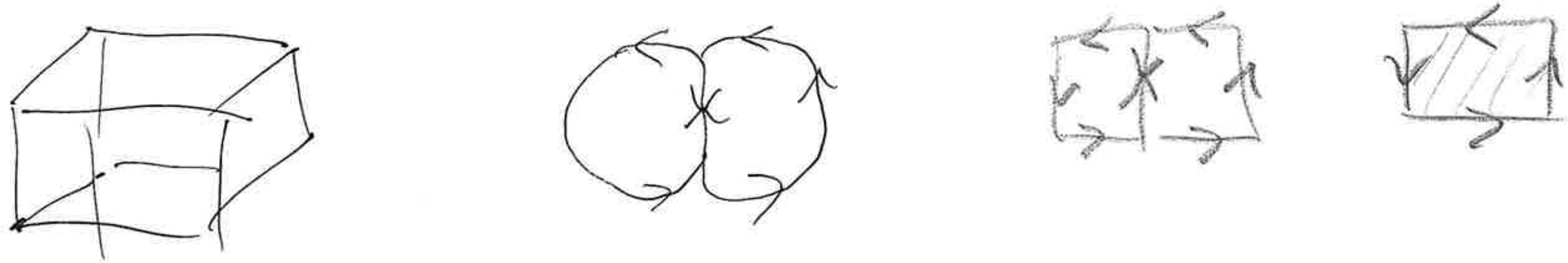
$$\int_{-\Gamma} F\cdot N\, dS = -\int_{\Gamma} F\cdot N\, dS$$





$\Gamma_A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6$ $\qquad$ $\Gamma_B = \Gamma_1' \cup \dots \cup \Gamma_5' \cup \Gamma_6$

$$\int_{\Gamma_A} F\cdot N\, dS + \int_{\Gamma_B} F\cdot N\, dS \qquad \int_{\Gamma_6} F\cdot N\, dS + \int_{-\Gamma_6} F\cdot N\, dS = 0$$



$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Def. ~~Givet~~ Vi definierar divergens operatoren som

$$\mathrm{div}: \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R})$$

$$F \longmapsto \mathrm{div}\, F := \nabla \cdot F := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^j}{\partial x_j}.$$

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^n \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^n \end{pmatrix}$$

Exempel
$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} x \\ x^2 y \\ z+x \end{pmatrix} = \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z}$$

$$= 1 + x^2 + 1 = 2 + x^2.$$

- $\mathrm{div}(F_1 + F_2) = \mathrm{div}\, F_1 + \mathrm{div}\, F_2$
- $\mathrm{div}(cF) = c\, \mathrm{div}(F)$

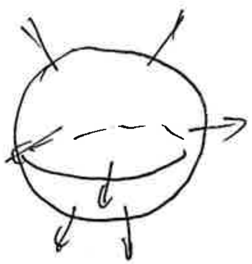
Sats. (Gauss Satsen / divergens satsen)

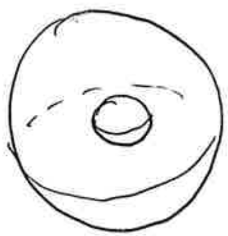
Om $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

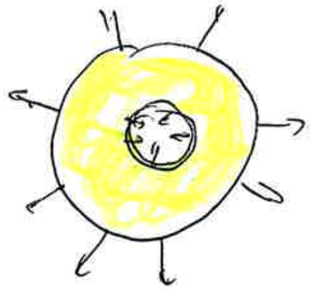
Om K är en kropp vars ∂K. består av ändligt många slutna ytor, var och en orienterad så att ~~vektor~~ enhetsvektor-normala pekar ut från kroppen K.

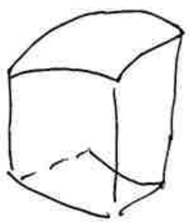
Det gäller att

$$\iint_{\partial K} F \cdot N \, dS = \iiint_K \nabla \cdot F \, dx\,dy\,dz$$

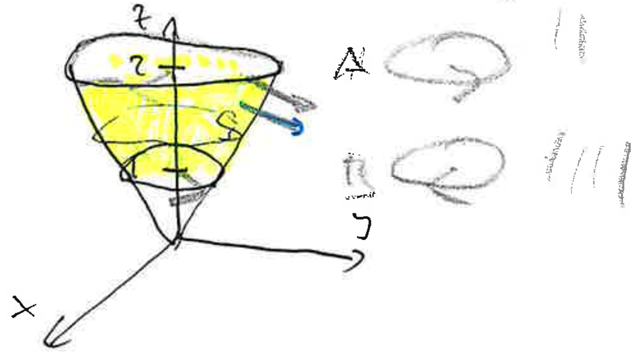




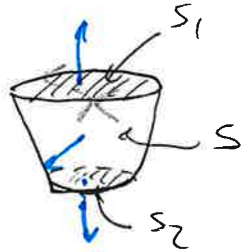




$$F = \begin{pmatrix} 3x \\ 5y + e^{\cos x} \\ z \end{pmatrix} \qquad S = \{(x,y,z) : z^2 = x^2+y^2 \quad 1 \le z \le 2\}.$$



$$K = \{(x,y,z) : \quad x^2+y^2 \le z^2 \quad 1 \le z \le 2\}.$$



$$\partial K = S \cup S_1 \cup S_2 .$$

$$\iint_{\partial K} F\cdot N\, dS = \boxed{\iint_S F\cdot N\, dS} + \underbrace{\iint_{S_1} F\cdot N\, dS}_{8\pi} + \underbrace{\iint_{S_2} F\cdot N\, dS}_{-2\pi}$$

Gauss Sats $\rightarrow \| $

$$\iiint_K \underbrace{(\nabla\cdot F)}_{3+5+1}\, dx\,dy\,dz = 9 \cdot \text{Volym}(K) = 21\pi$$

$$\text{Volym}(K) \underset{\text{Fubinis}}{=} \int_1^2 \Big(\underbrace{\iint_{x^2+y^2 \le z^2} dx\,dy}_{\pi z^2} \Big)\, dz = \pi \int_1^2 z^2\, dz$$

$$= \frac{\pi\,(z^3)}{3}\Big|_1^2 = \frac{\pi\,(8-1)}{3} = \frac{7\pi}{3}.$$

$z = z(x,y)$

$S_1 = N_{S_1} =$ $\qquad S_1 = \{(x,y,z) : \ z = 2 \ \text{och} \ (x,y) \in D\}.$

$D = \{(x,y) : \ x^2+y^2 \leq 4\}.$

$\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}} = \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = 1$

$$\iint_{S_1} F \cdot N \, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \underbrace{F(r(x,y)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z|_{r(x,y)}} \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right|}_{1} \, dx\,dy$$

$$= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 4.} dx\,dy = 8\pi$$

$$\iint_{S_2} F \cdot N \, dS = -2\pi$$