MM5011-F12.

Vi visade

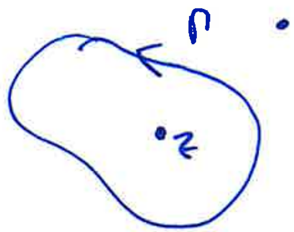
<u>Cauchys Integralformeln</u>

Låt Γ vara en positivt orienterade randen till ett öppet enkel sammanhängande området D

Antag att f är analytisk i en omgivning av $D \cup \Gamma$

Så gäller

$$\forall z \in D \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$



Anmärkning

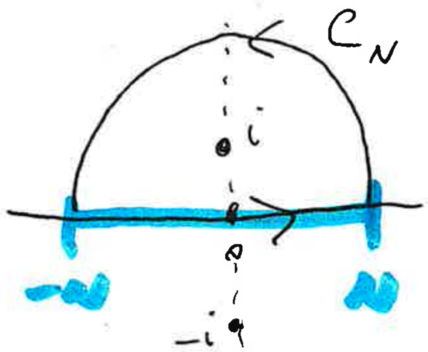
om $z \notin D \cup \Gamma$. $\quad \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$.

Beräkna integralen

$$x\in\mathbb{R}$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx \qquad t>0. \qquad \left|\frac{e^{itx}}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2}$$

(Notera att $I(-t) = I(t)$ så kan vi beräkna $I(t)$ för $t\in\mathbb{R}$.)



Låt $f(z) = \dfrac{e^{itz}}{1+z^2} = \dfrac{\left(e^{itz}/z+i\right)}{z-i} = \dfrac{g(z)}{z-i}$

f är analytisk i $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$.

$C_N = \{z : z = z(t) = Ne^{it}\ \ t\in[0,\pi]\}$.

$$I(t) = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$$

Låt $\Gamma_N = [-N, N] + C_N$. Cauchys integralformeln ger oss

$$2\pi i g(i) = \int_{\Gamma_N} \frac{g(z)}{z-i}\,dz = \int_{[-N,N]} \frac{g(z)}{z-i}\,dz + \int_{C_N} \frac{g(z)}{z-i}\,dz.$$

$$\int_{C_N} \frac{g(z)}{z-i}\,dz = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{g(z(s))}{z(s)-i}}_{f(z(t))} \cdot \dot{z}(s)\,ds = \int_0^{\pi} \frac{e^{iz(s)t}}{(z(t))^2+1} \underbrace{iNe^{is}}_{\dot{z}(s)}\,ds.$$

Vi vill visa att

$$\lim_{N\to+\infty} \left| \int_{C_N} \frac{g(z)}{z-i}\,dz \right| = 0$$

$$\left| \int_{C_N} \frac{g(z)}{z-i}\,dz \right| \le \int_0^{\pi} |f(z(s))|\, \underbrace{|\dot{z}(s)|}_{N}\,ds.$$

$$\left| \frac{e^{izt}}{z^2+1} \right| = \frac{|e^{izt}|}{|z^2+1|} \le$$

$z \in C_N \Rightarrow y \ge 0$, $t > 0$

$$|e^{izt}| = |e^{i(x+iy)t}| = |e^{ixt} \cdot e^{-yt}| = e^{-yt} \le 1.$$

$$|u+v| \le |u|+|v|$$

$$|u| = |u-v+v| \le |u-v|+|v| \Rightarrow |u|-|v| \le |u-v|$$

Vi kan också visa.

$$|v|-|u| \le |v-u| = |u-v|$$

Därför

$$\Big[\, \big||u|-|v|\big| \le |v-u| \,\Big]$$

Så

$$\big||u|-|v|\big| \le |v+u|$$

$$|z^2+1| \ge \big||z^2|-|1|\big| = \big||z|^2-1\big| \underset{\text{om } |z|>2.}{=} |z|^2-1.$$

Därför för $z \in C_N$ med $N>2$ gäller

$$\left|\frac{e^{izt}}{z^2+1}\right| \le \frac{1}{|z|^2-1} \underset{z \in C_N}{=} \frac{1}{N^2-1}$$

$[-N, N] = \{ z : \cancel{\ldots} \; z = t + 0i = z(t) \quad t \in [-N, N] \}$

$$\int_{[-N,N]} \frac{g(z)}{z-i}\, dz = \int_{-N}^{N} \frac{g(z(t))}{z(t)-i} \cdot \underbrace{\dot{z}(t)}_{=1} dt = \int_{-N}^{N} \frac{e^{its}}{1+s^2}\, ds.$$

Notera att

$$g(i) = \frac{e^{i^2 t}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2i}$$

Så

$$2\pi i \, g(i) = \pi e^{-t}.$$

Så gäller

$$0 \leq \left| \int_{C_N} f(z)\, dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{N}{N^2-1}\, ds := \frac{\pi N}{N^2-1} \qquad (\forall N > 2)$$

$$\Rightarrow \lim_{N \to +\infty} \int_{C_N} f(z)\, dz = 0.$$

Så har vi

$$I(t) = \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\, dx = \pi e^{-t} \qquad t > 0$$

Slutsatsen får vi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|t|}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Låt $\{f_n\}_n$ $\quad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$)

Def. ~~[illegible]~~ Exempel

i) $f_n(x) = x^n \quad x \in [0,1]$.

ii) $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n} \quad x \in [0,\infty)$

iii) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad x \in (-1,1)$. $\quad f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x}$$

$$\uparrow$$

Def. Vi säger att $\{f_n\}_n$ konvergerar punktvis mot f.

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in D \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in D.\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exempel. i) $\forall x \in [0,1) \quad f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Om $x = 1 \quad f_n(1) = 1^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

$\{f_n\}_n$ konvergerar punktvis mot $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x = 1 \\ 0 & \text{om } x \in [0,1) \end{cases}$

Vi säger att $\{f_n\}_n$ konvergerar likformigt mot f.

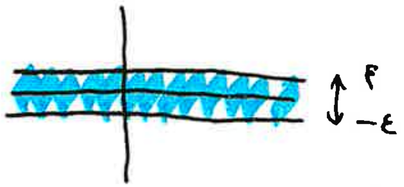
omm $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n\ge n_0 \ \underbrace{\forall x\in D \ |f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon}$

omm $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n\ge n_0 \ \underbrace{\sup_{x\in D} |f_n(x)-f(x)|}_{\|f_n-f\|_D} \le \varepsilon$.

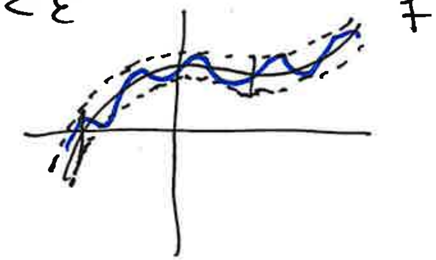
omm $\lim_{n\to\infty} \|f_n-f\|_D=0$.

Anmärkning: om h är reellvärda.

$\|h\|_D\le\varepsilon \iff \forall x\in D \ |h(x)|\le\varepsilon \iff \underbrace{\forall x\in D \ -\varepsilon\le h(x)\le\varepsilon}$.

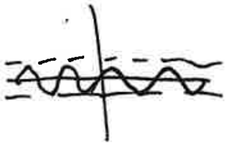


$\forall x\in D \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$



Exempel.

$f_n(x)=\frac{\sin x}{n}$.



$f_n(x)$ konvergerar punktvis mot 0.

Notera att $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-0|=\frac{1}{n}$

2) Låt $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ $\quad x \in \mathbb{R} = D$.

$$g(x)$$

$$g_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2} \longrightarrow \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$\|g_n\|_{\mathbb{R}} = 1 \not\to 0$

g_n konvergerar inte likformigt mot 0.

Givet $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$.

Vi vill studera

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_D = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$$

Visa att $|f_n(x)| \leq |f_n(\tfrac{1}{n})| = |f_n(-\tfrac{1}{n})| = \dfrac{1}{n+1}$.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{då } n \to +\infty.$$

Så gäller att $\{f_n\}_n$ konvergerar likformigt mot 0.

Anmärkning Om $\{f_n\}_n$ konvergerar likformigt mot f
så konvergerar punktvis.

Sats 1 Om $\{f_n\}_n$ konvergerar likformigt mot f i D.
om $f_n \in \mathcal{C}(D)$, så gäller att $f \in \mathcal{C}(D)$

Sats 2 Låt $D \subset \mathbb{R}^d$ vara en kvadrerbar, kompakt området
om $\{f_n\}_n$ är kontinuerliga i D och konvergerar
likformigt mot f så gäller att $f \in \mathcal{C}(D)$

$$\lim_n \int_D f_n(x)\,dx = \int_D \lim_n f_n(x)\,dx$$

Sats. 3 Om $\gamma \subset \mathbb{R}^d$ är en styckvis reguljärt kurva.
och $\{f_n\}_n$ konvergerar likformig mot f
och $f_n \in \mathcal{C}(\gamma)$

$$\lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(x)\,dx = \int_\gamma f(x)\,dx .$$

Sats 4 Låt $\{f_n\}$ vara en följd. $f_n \in C^1$ funktioner.

som konvergerar punktvis mot f. i intervallet I

Antas att $\{f_n'\}_n$ konvergerar likformigt mot g.

Så gäller att f är deriverbar och $f' = g$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bevis 2

$$0 \leq \left| \int_D f_n(x)\,dx - \int_D f(x)\,dx \right| = \left| \int_D (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq \int_D |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \cdot \int_D dx$$

$$= \|f_n - f\|_D \, \underbrace{Vol_d(D)} \longrightarrow 0 \quad \text{då } n \to +\infty$$

#

Bevis 1 [Vi vill visa
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$]

Givet $\varepsilon > 0$ $\quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0 \quad \|f - f_n\|_D < \varepsilon.$

Eftersom f_{n_0} är kontinuerlig $\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon.$$

Så gäller

$$|f(x) - f(x_0)| = |\underbrace{f(x) - f_{n_0}(x)} + \underbrace{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)} + \underbrace{f_{n_0}(x_0) - f(x_0)}|$$

$$\leq \|f - f_{n_0}\|_D + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f - f_{n_0}\|_D.$$

Så om $|t-t_0|<\delta$.

$$|f(x)-f(x_0)| \leq 2\|f-f_{n_0}\|+\varepsilon \leq 3\varepsilon.$$