MMS011-13

$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$)

$\{f_n\}_n$ konvergerar punktvis mot f om

$$\forall x \in D \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\forall x \in D \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right]$$

$\{f_n\}_n$ konvergerar likformigt mot f om

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \;\; \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n} \Big(\underbrace{\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|}_{\|f_n - f\|_D \;\; (\|f_n - f\|_\infty,\ \|f_n - f\|_{L^\infty(D)})} \Big) = 0 .$$

Satser

Om $\{f_n\}_n$ konvergerar likformigt mot f i $D \subset \mathbb{R}^d$

$f_n \in \mathcal{C}(D)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Så gäller

i) $f \in \mathcal{C}(D)$

ii) $\lim_n \int_D f_n(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx$

(Om D är en kvadrerbar, kompakt området!

Sats

Om $\{f_n\}_n$ uppfyller $[f_n \in \mathcal{C}^1(I)]$

- $\forall x \in I \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$ då $n \to \infty$
- $\{f_n'\}_n$ konvergerar likformigt mot g

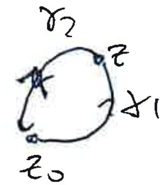
Så gäller att f är deriverbar och $f'(x) = g(x)$

(Så $\left(\lim_n f_n(x)\right)' = \lim_n f_n'(x)$)

Sats

Om $\{f_n\}_n$ är en följd av analytiska funktioner som konvergerar punktvis mot f i ett Ball $\overline{B_r}(z_0) = \Omega$. och $\{f_n'\}_n$ konvergerar likformigt mot g i Ω. så är f analytisk och $f'(z) = g(z)$ $z \in \Omega$.

Bevis Eftersom den komplexa integraler av analytiska funktioner är oberoende av vägen kan vi definierar.



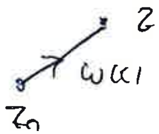
$$F_k(z) = \int_{[z_0,z]} f_k'(w)\,dw$$

$$\int_{\gamma_1-\gamma_2} f_k(z)\,dz = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\gamma_1} f_k(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f_k(z)\,dz$$

där $[z_0, z] = \{w(t) = z_0 + t(z - z_0)$ där $t \in [0,1]\}$.



Vi noterar att

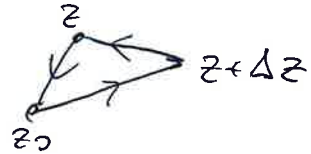
$$F_k(z) = \int_0^1 \underbrace{f_k'(w(t))\,\underbrace{w'(t)}_{(z-z_0)}}_{\frac{d}{dt}\left(f_k(w(t))\right)}\,dt = f_k(w(1)) - f_k(w(0)) = f_k(z) - f_k(z_0).$$

Så gäller

$$f(z) - f(z_0) = \lim_{k\to\infty} \int_{[z_0,z]} f_k'(w)\,dw = \int_{[z_0,z]} g(w)\,dw =: F(z).$$

Noterar att

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{[z,z+\Delta z]} g(w)\,dw = \int_0^1 g(z+t\Delta z)\,dt \cdot \Delta z.$$



$$\Rightarrow \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \int_0^1 g(z+t\Delta z)\,dt$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad |w|<\delta \Rightarrow |f(z+w)-f(z)|<\varepsilon$$

Eftersom g är kontinuerlig i z.

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad \underbrace{|\Delta z|<\delta \Rightarrow}_{|t\Delta z| \le |\Delta z|<\delta} \forall t\in[0,1] \quad |g(z+t\Delta z)-g(z)|<\varepsilon.$$

Därför

$$\boxed{\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-g(z)\right|<\varepsilon.}$$

Så F är komplext deriverbar i z och $F'(z)=g(z)$.

$$\left|\int_0^1 g(z+t\Delta z)\,dt-g(z)\right| = \left|\int_0^1 (g(z+t\Delta z)-g(z))\,dt\right| \#$$

$$\le \int_0^1 |g(z+t\Delta z)-g(z)|\,dt<\varepsilon$$

Så $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=g(z)$

Givet en följd av funktioner $\{f_n\}_n$ $\quad f_n : D \to \mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$)

$D \subset \mathbb{R}^d$

definierar vi partialsumman

$$S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x). \qquad \forall x \in D.$$

Vi säger att serien $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerar punktvis mot $S : D \to \mathbb{C}$ om

$$\forall x \in D \qquad S_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} S(x).$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D \quad \lim_{n} (S_N(x) - S(x)) = 0.$$

Vi säger att serien konvergerar likformigt mot S. om

S_n konvergerar likformigt mot S.

$$\Leftrightarrow \lim_{n} \left(\sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| \right) = 0.$$

[$S_n \underset{D}{\rightrightarrows} S$.

$\equiv (S_n)_n$ konvergerar likformigt mot S i D.]

Sats (Weierstrass majorantsats (M-sats av Weierstrass))

Antag att $\sum_{k\geq 1}' M_k$ konvergerar där

$$0 \leq \| f_k \|_D = \sup_{x \in D} | f_k(x) | =: M_k .$$

Så gäller att serien $\sum_{k\geq 1} f_k$ konvergerar likformigt.

Exempel.

$$f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^3} \qquad |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad 0 \leq \| f_n \|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^3}$$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{inx}}{n^3}$$

Så JFK-I

$\sum \| f_n \|_{\mathbb{R}}$ ~~äro~~ är konvergent

Så Weierstras majorantsats ger oss

$$\lim_N S_N(x) = F(x) := \sum_{k\geq 1}' \frac{e^{inx}}{n^3}$$ serien konvergerar likformigt

$$S_N'(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{i \cancel{n} e^{inx}}{n^{\cancel{3}\,2}} = i\sum_{k=1}^{N} \frac{e^{inx}}{n^2} \qquad z^n$$

Så (M-sats) garanterar att

$S_N'(x)$ konvergerar likformigt mot en funktion $G(x)$

$$G(x) = i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2} = \lim_{N} S_N'(x)$$

Så gäller att

F är deriverbar och $F'(x) = G(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Bevis.
Noterar att $\forall x \in D \quad |f_k(x)| \le M_k.$

Så gäller att
$\forall x \in D \quad s(x) := \sum \{f_k(x)\}$ är absolut konvergent.
så är konvergent.

Notera att $\forall n, m \quad n \le m$

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k \le \sigma - \sigma_n$$

där $\sigma = \sum_{k \ge 1} M_k$, $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$.

Om vi tar gränsvärdet då $m \to +\infty$.

$$|S_n(x) - S(x)| \le \sigma - \sigma_n \Rightarrow \underset{\downarrow \, 0}{0} \le \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| \le \underset{\downarrow \, 0}{\sigma - \sigma_n}.$$

$$\Rightarrow \lim_n \|S_n - S\|_D = 0.$$

#

Potensserier.

Def. Givet $z_0 \in \mathbb{C}$, en serier på formen $\{a_k\} \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \left(\cancel{= a_0 + a_1 (z-z_0)^1 + a_2 (z-z_0)^2 + \dots}\right)$$

kallas en potensserien

Vi kommer att studera fallet där $z_0 = 0$: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Notera att om $z=0$, konvergera serien.

Låt $R := \sup \{ |z| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergerar$\} \geq 0$.
(konvergensradie)

Sats 1

$$\frac{1}{R} := \inf_{n \geq 0} \left(\sup_{k \geq n} |a_k|^{1/k} \right) =: \limsup |a_k|^{1/k} \in [0, \infty].$$

Lemma. Om gränsvärdena nedan existerar (ändligt/oändligt) så gäller

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Exempel.

- $f(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k!}$ $\quad a_k = \frac{1}{k!}$ $\quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{k+1} \to 0$ då $k \to +\infty$.

$\Rightarrow R = \infty$

- $f(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k}.$ $\quad a_k = \frac{1}{k}$ $\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \to 1$ då $k \to +\infty$.

$\Rightarrow \frac{1}{R} = 1. \Rightarrow R = 1$

$g(z) = \sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$ $\quad |z|<1$

$f'(z) = \sum_{k\geq 1} z^{k-1} = \sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$ $\quad |z|<1$

Följdsats.

Givet $\sum a_k z^k$ potensserien med radie $R>0$

i) $\forall |x|<R$.

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

ii) $$\frac{d}{dz}\left(\sum_{k\geq 0} a_k z^k \right) = \sum_{k\geq 1} k a_k z^{k-1}$$

iii) konvergensradie för $\sum \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}$, $\sum k a_k z^{k-1}$ är R.

iv) Serien $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ är av klass $\mathcal{C}^{\infty}(B(0,R))$

v) S är en analytisk funktion för $|z|<R$.

$$\frac{1}{R} = \inf_n \underbrace{\left(\sup_{m \geq n} |a_m|^{1/m} \right)}_{b_n} \Rightarrow \forall n \quad \sup_{m \geq n} |a_m|^{1/m} \geq \frac{1}{R}.$$

$$\exists m \geq n \quad |a_m|^{1/m} \geq \frac{1}{R}$$

$|z| \neq 0$

Om $|z| < R. \Rightarrow |z| < R(1-\varepsilon)$ för något $\varepsilon > 0$)

$$\Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1-\varepsilon}{|z|} \qquad \exists n_0 : \sup_{m \geq n_0} |a_m|^{1/m} < \frac{1-\varepsilon}{|z|}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\forall m \geq n_0}} \qquad |a_m| \leq \left(\frac{1-\varepsilon}{|z|} \right)^m$$

Notera att

$$|a_m z^m| \leq \frac{(1-\varepsilon)^m}{\cancel{|z|^m}} \cancel{|z|^m} = (1-\varepsilon)^m$$

$$\Rightarrow \sup_{|z| \leq R(1-\varepsilon)} |a_m z^m| \leq (1-\varepsilon)^m \quad \Bigg\} \quad \sum a_m z^m \text{ konvergerar likformigt i } \overline{B(0, R(1-\varepsilon))}$$

Serien

$$\sum_{m \geq n_0} (1-\varepsilon)^m \text{ konvergerar.}$$

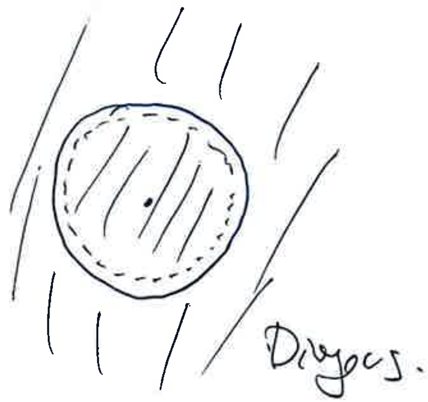
Sats. Det finns $R \geq 0$ sådant att serien

$$\sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

i) konvergerar absolut om $|z| < R$.

ii) $\forall s < R$ serien konvergerar likformigt i $|z| \leq s$.

iii) serien divergerar om $|z| > R$.



$$\frac{1}{R} = \inf_{n} \left(\sup_{m \geq n} |a_m|^{1/m} \right) \in [0, \infty].$$