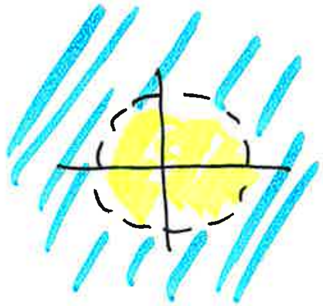
MMS011- F14

Sats Givet en potensserien $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$



$$\frac{1}{R} := \inf_{n} \left(\sup_{m\geq n} |a_m|^{1/m} \right) \in [0,\infty]$$

Det gäller

i) Serien konvergerar likformigt i $|z|\leq s$ för alla $s<R$ (om $R>0$)

ii) Serien konvergerar absolut om $|z|<R$

iii) Serien divergerar om $|z|>R$.

⌈Vi visade i) (och ii))

Följdsats
Givet en potensserie $\sum a_k z^k$ med konvergensradie $R > 0$

Det gäller

i) $\forall |z| < R$

$$\int_{[0,z]} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \right) dw = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k z^{k+1}}{k+1}$$

ii) $$\frac{d}{dz} \left(\sum_{k\geq 0} a_k z^k \right) = \sum_{k \geq 1} k a_k z^{k-1}$$

iii) konvergensradie för $\sum \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}$, $\sum k a_k z^k$ är R.

iv) Serien $s(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ är av klass $\mathcal{C}^\infty((-R,R))$

v) $s(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ är analytisk för $|z| < R$.

Bevis iii)

$$R = \sup\{|z| : \text{serien } \sum |a_k||z|^k \text{ konvergerar}\}.$$

Låt R_1, R_2 vara konvergensradie för $\sum \frac{a_k}{k+1} z^k$ resp. $\sum a_k z^k$.

Noterar att $\forall k \geq 0$

$$\left|\frac{a_k}{k+1}\right| \leq |a_k| \underset{\text{JFK-I}}{\Longrightarrow} \left(\text{Om } |z|<R \Rightarrow \sum \left|\frac{a_k}{k+1}\right| |z|^k \text{ konvergerar}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 \geq R.}$$

Om $|z| \leq |z_1| < R_1$ $\left(\sum \frac{|a_k|}{k+1} |z_1|^k \text{ konvergerar} \right)$

Noterar att

$$|z|^k |a_k| = \underbrace{\frac{|a_k|}{k+1} \cdot |z_1|^k}_{b_k} \cdot \underbrace{(k+1)\left(\frac{|z|}{|z_1|}\right)^k}_{\downarrow k\to+\infty \atop 0}.$$

$$\Rightarrow \frac{|z|^k|a_k|}{b_k} \longrightarrow 0$$

JFK-II ger oss att

$$\sum b_n = \sum \frac{|a_n|}{k+1} |z_1|^k \text{ konvergerar}$$

$$\Rightarrow \sum |a_n| |z_1|^k \text{ konvergerar}$$

Så gäller att

$$\boxed{R \geq R_1} \qquad (\Rightarrow R = R_1)$$

Vi visade

<u>Sats</u> Om $\{f_k\}_k$ är en följd av analytiska funktioner sådan att

$\forall z \in \overline{B}_r(z_0) \quad f_k(z) \longrightarrow f(z)$ då $k \to +\infty$

och

f_k' konvergerar likformig mot g i $\overline{B_r(z_0)}$

så gäller att f är analytisk och

$$f'(z) = g(z) \quad \forall\, |z-z_0| \leq r$$

<u>Följdsats</u> Givet en potensserie $\sum_{k \geq 0} a_k (z-z_0)^k$ med

konvergensradie $R > 0$, gäller att

$$f(z) := \sum_{k \geq 0} a_k (z-z_0)^k \qquad |z-z_0| < R.$$

är analytisk i $B_R(z_0)$.

Lemma.

Låt γ vara en enkel slutna kurva och $g \in \mathcal{C}(\gamma)$

Vi Definierar

$$h_n(z) := \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n}\, dw. \quad \text{för } z \in \operatorname{Int}(\gamma).$$

$n \in \mathbb{N} = n = 1, 2, \ldots$

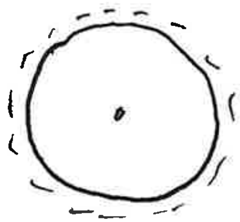
Det gäller att

h_n är analytisk i $\operatorname{Int}(\gamma)$ och

$$h_n'(z) = n\, h_{n+1}(z).$$

[Notera, Cauchys integral formula säger att om f är analytiskt i $B_R(z_0)$, för alla $r < R$.

$$\forall z \in B_r(z_0) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw.$$



$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw$$

]

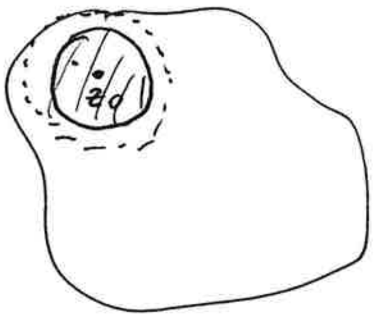
Följdsats.

Om f är analytisk i $B_R(z_0)$, så gäller att $k \geq 1$.

$f^{(k)}(z)$ är analytisk i $B_R(z_0)$ och $\forall r < R$.

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} \, dw.$$

Sats. Om f är analytisk i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ så kan f uttryckas som en konvergent potensserie i en omgivning av varje punkt i Ω.



Bevis. Givet $z_0 \in \Omega$ låt $B_r(z_0) \subset \Omega$. $\left(\exists \varepsilon > 0 : \overline{B_r(z_0)} \subset B_{r(1+\varepsilon)}(z_0) \subset \Omega \right)$

Cauchyformeln ger oss

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \quad z \in B_r(z_0)$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1+\frac{z_0-z}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\left[\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\right]$$

$$= \frac{1}{w-z_0} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k = \cancel{\frac{1}{(w-z_0)}}$$

Om $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$ $\left(\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r} < 1 \right.$

om vi låt $|z-z_0| \leq s$ så $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| \leq \frac{s}{r} <$

så om $\boxed{|z-z_0| < s < r.}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \underbrace{\sum_{k\geq 0} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k}_{\text{likformigt.}} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$$

$$= \sum_{k\geq 0} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw}_{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}} \Bigg) (z-z_0)^k.$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \qquad |z-z_0| < s < r$$

$$B_r(z_0) \subset \Omega.$$

$$\left.\begin{array}{l}(k+1)k\,a_{k+1} - a_k = 0 \\ \forall k \geq 1\end{array}\right\} \Rightarrow a_{k+1} = \frac{a_k}{k(k+1)} \quad \forall k \geq 1$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} a_k = \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{k(k-1)} a_{k-1}$$

$$\cancel{a_{k+1}} \qquad = \ldots = \frac{1}{k!(k-1)!} a_1.$$

Om det finns en analytisk lösning, det ges av serien

$$a_1 \left(\sum_{k \geq 1} \underbrace{\frac{1}{k!(k-1)!}}_{b_k} \cancel{a_1} x^k \right) = f(x) \qquad f'(0) = a_1 = 1$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)!\ \cancel{k!}}}{\frac{1}{\cancel{k!}} \frac{1}{(k-1)!}} = \frac{1}{(k+1)k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \boxed{R = \infty}$$

Följdsats.

Serieutvecklingen av en analytisk funktion ges av den klassiska Taylorserien

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \qquad |z-z_0|<R.$$

Sats. Om $f(z)$ är av klass $\mathcal{C}^1(\Omega)$ (Ω enkel sammanhängande öppen)

så är följande ekvivalenta.

i) f är komplext deriverbar i Ω.

ii) f uppfyller C-R. $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)=0 \quad \forall z\in\Omega$

iii) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \gamma\subset\Omega$ sådant att $\mathrm{Int}\,\gamma\subset\Omega$, γ sluten

iv) I en omgivning av varje punkt z_0, ges $f(z)$ som en konvergent potensserie.

Potensserier och differentialekvationer.

$$\left[\begin{array}{l} xf''(x) - f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{array}\right| \quad (*)$$

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k = a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k x^k$$

$$f'(x) = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1) a_k x^{k-2} \Rightarrow x f''(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1) a_k x^{k-1}$$

$$= \sum_{j\geq 1} (j+1) j\, a_{j+1} x^j$$

$$\begin{array}{l} k-1=j \\ k=j+1 \end{array} \quad = \sum_{k\geq 1} (k+1) k\, a_{k+1} x^k$$

$$xf''(x) - f(x) = 0 \iff \underbrace{a_0}_{=0} + \sum_{k\geq 1} \underbrace{\left[(k+1)k\, a_{k+1} - a_k\right]}_{=0} x^k = 0$$

Om det finns en analytisk lösning, det uppfyller

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{k(k+1)} \quad \forall k \geq 1$$

Så

$$a_k = \frac{a_1}{k!(k-1)!}$$

Därför lösningen, om det existerar, uppfyller

$$f(x) = a_1 \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!(k-1)!} x^k \right) \rightarrow f(x) = \sum_{k \geq 1} \overbrace{\frac{1}{k!(k-1)!}}^{b_k} \cdot x^k$$

löser ✡

och är definierad $\forall x \in \mathbb{R}$

Noterar att
$1 = f'(0) = a_1$

eftersom

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k} \frac{1}{(k+1)k} \Rightarrow 0 \Rightarrow (R = \infty)$$

Bevis Lemma för $n=1$

Notera att

$$\frac{1}{w-z} - \frac{1}{(w-z-\Delta z)} = \frac{-\Delta z}{(w-z)(w-z-\Delta z)}$$

Så

$$\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z-\Delta z}\right) - \frac{1}{(w-z)^2} = \frac{1}{(w-z)}\left(\frac{-(w-z)+(w-z-\Delta)}{(w-z)(w-z-\Delta z)}\right)$$

$$= \frac{-\Delta z}{(w-z)^2(w-z-\Delta z)}$$

Så if $z \in \Omega_\delta = \{ u \in \operatorname{Int}\gamma : \inf_{w \in \gamma} |w-u| \geq \delta \}$. (givet $\delta > 0$)

för $|\Delta z| < \delta/2$. $|w-z| \geq \delta$ och $|w-z-\Delta z| \geq \delta/2$.

$$\left| \frac{h_1(z+\Delta z) - h_1(z)}{\Delta z} - h_2(z) \right| \leq \frac{|\Delta z|}{\delta^2 (\delta/2)} \int_\gamma^2 |g(w)|\,|dw|$$

Därför

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{h_1(z+\Delta z) - h_1(z)}{\Delta z} = h_2(z). \quad \forall z \in \Omega_\delta \quad \forall \delta > 0.$$

Så är h_1 differentierbar (komplext) och $h_1'(z) = h_2(z)$ $\forall z \in \mathrm{Int}(\gamma)$.