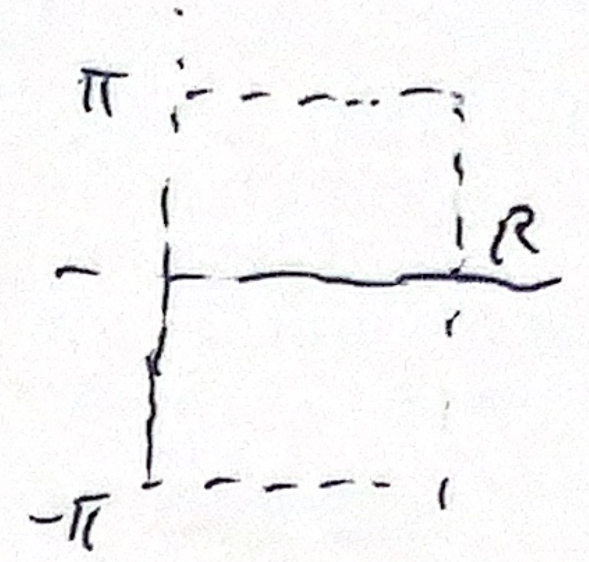
MM5011 - F03 - Appendix

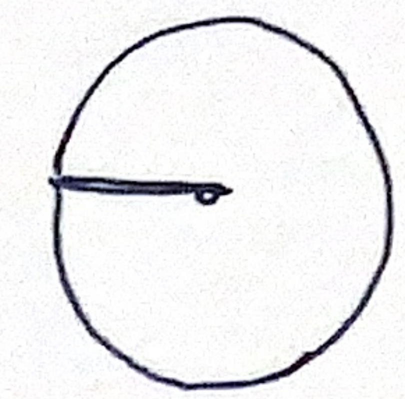
Volym av $B_R(0)$ i dimension d

Vi har definierad

givet $R>0$ $\quad \varphi_2 : \Omega_2^R := (0,R)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(r,\gamma) \longmapsto \varphi_2(r,\gamma) = \begin{pmatrix} r\cos\gamma \\ r\sin\gamma \end{pmatrix}$$





$$\varphi_2 \in \mathcal{C}^1(\Omega_2^R) \quad \{(x,y): x^2+y^2<r\} \setminus \underbrace{\{(x,y): x\le 0,\ y=0\}}_{\text{nollmängd.}} = \varphi_2(\Omega_2^R)$$

$\det d\varphi_2(r,\theta) = r > 0 \quad \forall (r,\theta)\in\Omega_2^R.$

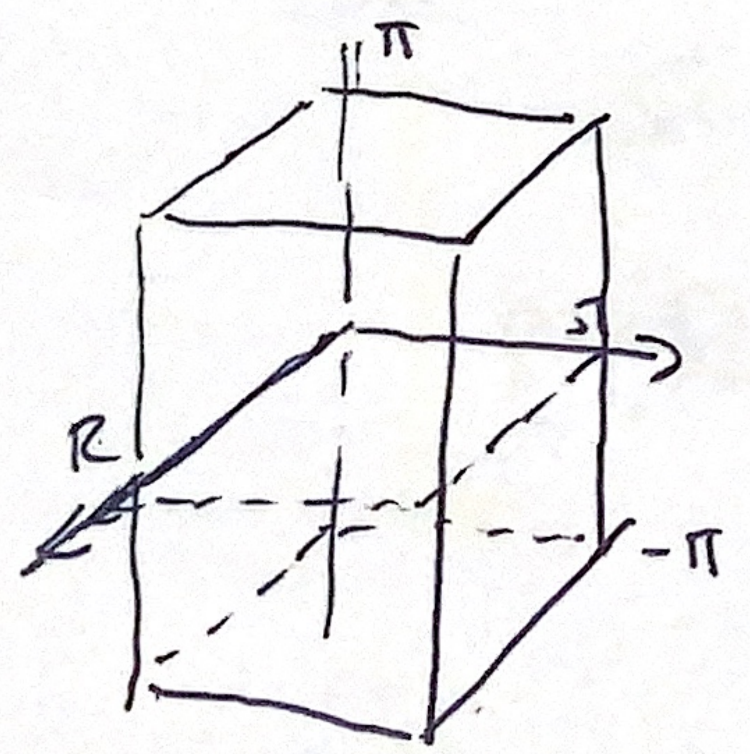
Ω_2^R öppet, begränsad, kvadrerbar

$\varphi_2(\Omega_2^R)$ " " "

$$\varphi_3 : \Omega_3^R := (0,R)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r,\theta,\gamma) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\,\varphi_2(1,\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\cos\gamma \\ r\sin\theta\sin\gamma \end{pmatrix}$$

$\varphi_3 \in \mathcal{C}^1(\Omega_3^R)$ & $\varphi_3(\Omega_3^R) = B_R(0) \setminus \{(x,y,z): z=0 \ y\le 0\}$



Ω_3^R öppet, begränsad, kvadrerbar

$\varphi(\Omega_3^R)$ " " "

$\det d\varphi_3(r,\theta,\gamma) = r^2\sin\theta$

För flervariabler $d \geq 3$

$$\varphi_d : \Omega_d^R := (0,R) \times (0,\pi)^{d-2} \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(r, \Theta, \gamma) \longmapsto \varphi_d(r, \bar\theta, \gamma) = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1 \, \varphi_{d-1}(1, \bar\theta, \gamma) \end{pmatrix}$$

där $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \bar\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$

Man har

- $\varphi_d \in \mathcal{C}^1(\Omega_d^R)$
- $\underbrace{\det d\varphi_d(r, \theta, \gamma)}_{J_d(r,\theta,\gamma)} = r^{d-1} S_{n-1}(\bar\theta)$ där $S_{d-1}(\theta) = \prod_{j=1}^{d-2} \sin^{(d-1)-j} \theta_j$
- $\varphi_d(\Omega_d^R) = B_R(0) \setminus \underbrace{\{(x_1, \dots, x_d) : \ x_{d-1} \leq 0 \text{ och } x_d = 0\}}_{\text{nollmängd}}.$

Så är

Ω_d^R öppet, begränsad, kvadrerbar

$\mathcal{C}(\mathbb{R}_d^R)$ " " " .

Låt $\Sigma_{d-1} = \partial B_1(0) = \{(x_1, \dots, x_d) : |x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$.

Notera att

$d \geq 3$ $\quad \Psi_d : \overbrace{(0,\pi)^{d-2} \times (-\pi,\pi)}^{U_d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$\qquad (\theta, \gamma) \longmapsto \Psi_d(\theta,\gamma) := \varphi_d(1, \theta, \gamma)$

$d = 2$

$\Psi_2(\theta,\gamma) = \varphi_2(1,\gamma)$

uppfyller att

$\forall (\theta, \gamma) \in U_d \quad 1 = |\Psi_d(\theta,\gamma)|^2 = \Psi_d(\theta,\gamma) \cdot \Psi_d(\theta,\gamma)$

$\Psi_d(U_d) = \Sigma_{d-1} \setminus \{x : |x| = 1, x_d = 0, x_{d-1} \leq 0\}$.

Kedjeregeln ger oss att

$$0 = \frac{\partial \Psi_d}{\partial \theta_j}(\theta,\gamma) \cdot \Psi_d(\theta,\gamma)$$

och

$$0 = \frac{\partial \Psi_d}{\partial \gamma}(\theta,\gamma) \cdot \Psi_d(\theta,\gamma)$$

Det medför att $\forall (\theta,\gamma) \in U_d$

$\vec{0} = \frac{\partial \Psi_d}{\partial(\theta,\gamma)} \cdot \Psi_d(\theta,\gamma) \Leftrightarrow \Psi_d(\theta,\gamma)$ är normalvektor till "ytan" $\Psi_d(U_d)$ vid $\Psi_d(\theta,\gamma)$.

Antag att $f, g \geq 0$

$f(x) = h(|x|)$ där $h \in \mathcal{C}[0,s]$.

$g : \Sigma_{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}(\Sigma_{d-1})$. so $g(\frac{x}{|x|}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$

Givet $s > \varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon < |x| < s} h(|x|)\, g\left(\frac{x}{|x|}\right) d\bar{x}$$

$$= \int_\varepsilon^s \int_{[0,\pi]^{d-2}} \int_{(-\pi,\pi)} r^{d-1} S_{d-1}(\theta)\, g(\varphi_d(1,\theta,\gamma))\, h(r)\, d\gamma\, d\theta\, dr.$$

[Polära koordinater.]

+ Fubinis satsen

$$= \left(\int_\varepsilon^s r^{d-1} h(r)\, dr\right) \left(\underbrace{\int_{[0,\pi]^{d-2}} \int_{-\pi}^{\pi} S_{d-1}(\theta)\, g(\varphi_d(1,\theta,\gamma))\, d\theta\, d\gamma}_{\overset{!!}{=} \left[\int_{\Sigma_{d-1}} g(\omega)\, d\mathcal{H}_{d-1}(\omega)\right]} \right)$$

Om vi tar gränsvärdet då $\varepsilon \to 0^+$

får vi att

$$\boxed{\int_{B_s(0)} h(|x|)\, g\left(\frac{x}{|x|}\right) dx = \left(\int_0^s h(r)\, r^{d-1}\, dr\right)\left(\int_{\Sigma_{d-1}} g(\omega)\, d\mathcal{H}_{d-1}(\omega)\right)} \quad (\bigstar)$$

--- -- - -

Om $h(t) := e^{-t^2}$ och $g \equiv 1$ vid $(\bigstar)$

defenierar vi

$$\boxed{\omega_{d-1} := \int_{\Sigma_{d-1}} d\mathcal{H}_{d-1}(\omega)}$$

och vi tar gränsvärdet då $s \to +\infty$, får vi

$$\pi^{d/2} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2}\, dx = \left(\int_0^\infty e^{-t^2}\, t^{d-1}\, dt\right)\omega_{d-1}$$

[kolla föreläsning 3]

$$= \begin{bmatrix} s = t^2 \\ t = \sqrt{s} \\ dt = \frac{1}{2}\frac{ds}{\sqrt{s}} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-s}\, s^{\frac{d}{2}-1}\, ds\right)}_{\overset{!!}{=}\ \Gamma(d/2)} \frac{\omega_{d-1}}{2}.$$

$\Gamma(d/2)$ (Gamma funktion)

Så får vi att

$$\boxed{\omega_{d-1} = \frac{2\,\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}}$$

Om vi sätter $g = 1$ och $h = \chi_{B_s(0,1)}$ vid (*) får vi att

$$\mathrm{Vol}_d(B_s(0)) = \omega_{d-1} \int_0^s r^{d-1}\, dr = \frac{s^d}{d}\omega_{d-1}$$

$$= \frac{2\pi^{d/2}}{d\,\Gamma(d/2)} s^d .$$

(Så kan vi beräkna d-Volym av $B_s(0)$)

Notera att för $d \geq 3$, kan vi skriva $x = (x_1, x_2, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-2}$.

Så

$$\mathrm{Vol}_d(B_s(0)) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + |\bar{x}|^2 \leq s^2} dx_1 dx_2 d\bar{x}$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{|\bar{x}| \leq s^2} \underbrace{\left(\int_{x_1^2 + x_2^2 \leq s^2 - |\bar{x}|^2} dx_1 dx_2 \right)}_{\mathrm{Vol}_2(B_{s^2 - |\bar{x}|^2}(0))} d\bar{x}$$

$$= \int_{|\bar{x}| \leq s^2} \pi (s^2 - |\bar{x}|^2)\, d\bar{x}$$

$$= \pi \omega_{d-2} \int_0^s (s^2 - t^2)\, t^{(d-2)-1}\, dt = \ldots = \frac{2\pi}{d} \underbrace{\frac{\omega_{(d-2)-1}}{d-2}}_{\mathrm{Vol}_{d-2}(B_1(0))} \cdot R^d$$

[Polära koordinater i $\mathbb{R}^{d-2}$]

(✱) med $h(r) = R^2 - r^2$

$g \equiv 1$

$$= \frac{2\pi}{d} R^d \, \mathrm{Vol}_{d-2}(B_1(0))$$

Så ~~fara~~ kan vi beräkna Volymen av $B_R(0)$ från lägre dimensioner.

d	$Vol_d(B_R(0))$	$\omega_{d-1} = \mathcal{H}_{d-1}(\Sigma_{d-1}) = \frac{d}{dR}\left(Vol_d(B_R(0))\right)\Big\vert_{R=1}$
1	$2R$	2
2	πR^2	2π
3	$\frac{2\pi}{3} \cdot R^3 \, Vol_1(B_R(0))$ $= \frac{4\pi R^3}{3}$	4π
4	$\frac{2\pi}{4} R^4 \, Vol_2(B_R(0))$ $= \frac{2\pi^2 R^4}{4} = \frac{\pi^2 R^4}{2}$	$2\pi^2$.
5	$\frac{2\pi}{5} R^5 \, Vol_3(B_R(0))$ $= \frac{8\pi^2}{15} R^5$	$\frac{8\pi^2}{3}$