Matematiska Institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Åsa Ericsson

Tentamensskrivning i
**Vektorgeometri och funktionslära**
20 mars 2014, kl. 9:00-14:00

# Svar och Lösningsförslag

## Del A: Korta frågor

(a) $(2,0,3)\bullet(6,-3,-1) = 12-3 = 9$

(b) $\frac{1}{2}\big((1,\sqrt[3]{5},-1)+(3,-\sqrt[3]{5},0)\big) = (2,0,-\frac{1}{2})$

(c) T.ex. ligger $(1,0,-1)$ i planet $2x-z=3$ och $(0,0,0)$ ligger inte i planet.

(d) $(x-1)^2+(y-e)^2 = 16$

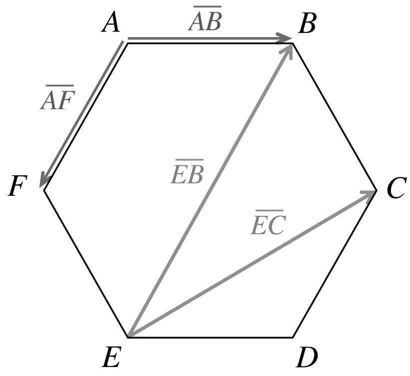
(e) $z = (2+i)(1-3i) = 2-6i+i-3i^2 = 5-5i$ så $\bar{z} = 5+5i$.

(f) $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = 56$

(g) $3^{x-1} = 81$ kan skrivas $3^{x-1} = 3^4$ vilken har lösningen $x=5$.

(h) $\ln\Big(\left(e^2\right)^t\Big) = \ln e^{2t} = 2t$

## Del B: Problem




1. De sökta linjärkombinationerna är $\overline{EB} = -2\overline{AF}$ och $\overline{EC} = \overline{AB} - \overline{AF}$.

   Längden av de längre diagonalerna är $|\overline{EB}| = |-2\overline{AF}| = 2$. De kortare diagonalerna har längd $|\overline{EC}] = |\overline{AB} - \overline{AF}|$. För att beräkna denna använder vi att

$$|\overline{AB} - \overline{AF}|^2 = \left(\overline{AB} - \overline{AF}\right) \bullet \left(\overline{AB} - \overline{AF}\right) = |\overline{AB}|^2 - 2\,\overline{AB} \bullet \overline{AF} + |\overline{AF}|^2$$

$$= 1 - 2\cos 120^\circ + 1 = 2 - 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3\ .$$

   Alltså är $|\overline{EC}] = \sqrt{3}$.

2. (a) Eftersom en normalvektor är $(3, -2, 4)$ ges planets ekvation av $3x - 2y + 4z = D$ för någon konstant $D$. Vi sätter in punkten $(10, 18, 3)$ för att bestämma $D$:

$$D = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 18 + 4 \cdot 3 = 30 - 36 + 12 = 6$$

   Planets ekvation är $3x - 2y + 4z = 6$.

   (b) Linjen genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(2, 6, 5)$ har en riktningsvektor $(2, 6, 5) - (1, 1, 1) = (1, 5, 4)$. En ekvation för linjen är $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 5, 4)$.

   (c) Punkten $(1, 1, 1)$ på linjen motsvaras av att $t = 0$, punkten $(2, 6, 5)$ av $t = 1$. Vi bestämmer nu för vilket värde på parametern $t$ som linjen skär planet. Då uttrycken för $x$, $y$ och $z$ enligt linjens ekvation sätts in i planets ekvation får vi

$$3(1 + t) - 2(1 + 5t) + 4(1 + 4t) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 9t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{9}\ .$$

   Så linjen skär planet i den punkt som fås då $t = \frac{1}{9}$. Eftersom $0 < \frac{1}{9} < 1$ visar detta att punkterna $(1, 1, 1)$ och $(2, 6, 5)$ ligger på olika sidor om planet.

3. (a) Polynomet $p(x) = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{13} + x^{15}$ ges av en geometrisk serie med 8 termer där första termen är $x$ och kvoten $x^2$. Då $x \neq \pm 1$ är kvoten skild från 1 och vi kan skriva

$$p(x) = x \cdot \frac{1-(x^2)^8}{1-x^2} = \frac{x(1-x^{16})}{1-x^2} \ .$$

(b) Eftersom

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$$

så är

$$x^8 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$$

(detta följer från att $\operatorname{Arg} x^8 = 8 \cdot \operatorname{Arg} x$). Om $x^8 = 1$ är förstås även $x^{16} = 1$ och på grund av faktorn $(1 - x^{16})$ i uttrycket för $p(x)$ ser vi att $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ är ett nollställe till $p(x)$.

4. (a) Termen i utvecklingen av $\left(\frac{1}{6} + t\right)^9$ som innehåller $t^7$ ges enligt binomialsatsen av

$$\binom{9}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 t^9 = \frac{9!}{7!\,2!} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot t^7 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 6^2} \cdot t^7 = t^7 \ .$$

Koefficienten för $t^7$ är 1.

(b) $\log_7\left(21\sqrt{7}\right) - \log_7 3 = \log_7\left(\frac{21\sqrt{7}}{3}\right) = \log_7\left(7 \cdot 7^{\frac{1}{2}}\right) = \log_7 7^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

5. Låt $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 3$.

(a) Eftersom andragradstermen har koefficienten 6 är $x$-koordinaten för inflexionspunkten $x = -\frac{6}{3} = -2$. Sätter vi in detta i uttrycket för kurvan får vi

$$y = (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 + 9 \cdot (-2) - 3 = -8 + 24 - 18 - 3 = -5 \ .$$

Inflexionspunkten är $(-2, -5)$.

(b) För att bestämma tangentens ekvation i inflexionspunkten är det lämpligt med substitutionen $t = x + 2$, vilket är ekvivalent med att $x = t - 2$. Inflexionspunkten motsvaras av att $t = 0$. Insättning i uttrycket för kurvan ger

$$\begin{aligned} y &= (t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 9(t-2) - 3 \\ &= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 + 6t^2 - 24t + 24 + 9t - 18 - 3 \\ &= t^3 - 3t - 5 \ . \end{aligned}$$

(Anm. $t = 0$ ger $y = -5$; detta är alltså ett annat sätt att hitta $y$-koordinaten för inflexionspunkten.) För $t$ nära 0 kommer kurvan approximeras av linjen $y = -3t - 5$ ($|t^3|$ är mycket mindre än $|t|$.) så detta är tangentens ekvation. Återsubstitution av $t = x + 2$ ger

$$y = -3x - 11 \ .$$

(c) Nu söker vi tangents ekvation då $x = 0$. För $x$ nära 0 är $|x^3|$ oh $|x^2|$ mycket mindre än $|x|$. Därför approximeras kurvan av linjen $y = 9x - 3$, vilket precis är tangentens ekvation.

6. Förhoppningen här är att en omskrivning möjliggör en användbar substitution. Notera att

$$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2\left(\sqrt{2}^2\right)^x = 2\left(\sqrt{2}^x\right)^2 \ ,$$

enligt potenslagarna. Vi använder denna omskrivning i ekvationen:

$$8\sqrt{2}^x = 2^{x+1} + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 8\sqrt{2}^x = 2\left(\sqrt{2}^x\right)^2 + 6 \ .$$

Substitutionen $\sqrt{2}^x = t$ ger den enklare ekvationen

$$8t = 2t^2 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-3)(t-1) = 0 \ ,$$

vilken har lösningarna $t = 3$ och $t = 1$. Alltså gäller det att $\sqrt{2}^x = 3$ eller $\sqrt{2}^x = 1$. Kvadrering av båda led ger $2^x = 9$ eller $2^x = 1$. Slutligen får vi lösningarna genom att logaritmera: $x = \log_2 9$ och $x = \log_2 1 = 0$.