Läsanvisningar till Analys B, HT 15

Del 1

Dag 1

Avsnitt 6.1

Definition av trappfunktion och integral av en trappfunktion. Räkneregler (de är mer eller mindre uppenbara). Definition av Riemannintegralen av en begränsad funktion över en rektangel. Man kan definiera integrerbarhet och integralen som i PB, men man kan även definiera under- och överintegralen precis som i Analys A (genom sup och inf) och sedan definiera integrerbarhet som villkoret att under- och överintegralen är lika. Bevis för sats 1 kan hoppas över. Sats 2 är viktig (och borde vara känd från Analys I) men bevis kan hoppas över. Även sats 3 är viktig men bevis hoppas över (det bygger på begreppet likformig kontinuitet som vi inte tar upp i kursen). Exempel 1-3 är repetition av Analys I och läses vid behov.

Avsnitt 6.2

Definition av dubbelintegral av en begränsad funktion över ett godtyckligt område. Nollmängder och kvadrerbara mängder. (Namnet kvadrerbar kommer från ordet kvadratur som är ett gammalt namn för integration.) Lemma 1 och 3. I lemma 2 används begreppet likformig kontinuitet. En alternativ formulering som inte använder det begreppet är: Låt f vara kontinuerlig på en kompakt och kvadrerbar mängd D. Då är f integrerbar över D (observera att eftersom D är kompakt, så följer det att f är begränsad där (sats 4, avsnitt 1.6). Sats 4 är viktig och borde vara känd från Analys I. Bevisen hoppas över. Exempel 5-7 är repetition och läses vid behov. Delavsnittet om medelvärdesegenskapen läses översiktligt.

Avsnitt 6.3

Allt fram till och inklusive sats 5 läses (bevis utgår). Dock är exempel 8 mindre viktigt. Exempel 9-11 är mindre viktiga, de 2 sista handlar egentligen om övergång till polära koordinater.

Avsnitt 6.4

Hela avsnittet läses. Läs också det som står på sid. 143 om areaförstoring, det förklarar funktionaldeterminantens roll och är viktigt. En viktig anmärkning som inte står explicit i boken är att sats 6 gäller även om antagandena är uppfyllda med undantag för en nollmängd. Detta förklaras i efterföljande exempel. I exempel 16 skall man i definitionen av området D ändra xy-planet till första kvadranten (annars består D av 2 delar: den som syns på bilden och en likadan del i tredje kvadranten).

På kurssidan under dag 1 finns det 2 filer: en med repetition av dubbelintegraler från Analys I (egentligen en pdf-fil med en föreläsning i Analys I) och en inspelad föreläsning av Martin Tamm om variabelbyte.

Kommentarer

I en av teorifrågorna skall man definiera begreppen integrerbar funktion och Riemannintegral över en rektangel och över ett godtyckligt (begränsat) område samt förklara begreppet Riemannsumma. För att besvara frågan måste man först förklara vad som menas med en trappfunktion och definiera dess integral. Sedan definierar man begreppen integrerbar funktion och integral (definition 1 och 2 i avsnitt 6.1). Alternativt kan man definiera under- och överintegralen som i Analys A:

$$\text{underintegralen: } \sup_{\Phi \leq f} \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy, \text{ överintegralen: } \inf_{f \leq \Psi} \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dxdy,$$

där Φ och Ψ är trappfunktioner. Då kallas f integrerbar om under- och överintegralen är lika och det gemensamma värdet kallas för integralen av f över Δ. Integralen över ett godtyckligt område definieras i avsvnitt 6.2, se definition 3. Förklaring till begreppet Riemannsumma finns i avsnitt 6.3. Lägg märke till att man delar in området D i små delområden D_k som skall vara kvadrerbara och sådana att om $j \neq k$, så får inte D_j och D_k ha gemensamma inre punkter (de får dock ha gemensamma randpunkter). Till sist, för att få en bra approximation av integralen över D (jfr. sats 5), måste diametern av alla D_k vara liten (enligt bokens språkbruk skall indelningens finhet gå mot 0).

Bevis för sats 6 skissas mycket kortfattat på sid. 260-261 i PB. Här kommer några fler detaljer. Låt för enkelhets skull E vara en axelparallell rektangel och dela in den i ett antal små axelparallella rektanglar som alla har längden Δu och höjden Δv. Det som svarar mot E_k högst uppe på sid. 261 (vänstra bilden) är då en rektangel med hörn i (u_k, v_k), $(u_k + \Delta u, v_k)$, $(u_k, v_k + \Delta v)$ och $(u_k + \Delta u, v_k + \Delta v)$, där Δu och Δv är små. Beteckna $\mathbf{r}(u,v) = (g(u,v), h(u,v))$. Den krokiga "rektangeln" D_k på högra bilden har hörn i punkterna $\mathbf{r}(u_k, v_k)$, $\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v_k)$, $\mathbf{r}(u_k, v_k + \Delta v)$ och $\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v_k + \Delta v)$. Eftersom funktionerna är av klass C^1 och därmed differentierbara, så är

$$\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v_k) - \mathbf{r}(u_k, v_k) \approx \mathbf{r}'_u(u_k, v_k)\Delta u$$

och

$$\mathbf{r}(u_k, v_k + \Delta v) - \mathbf{r}(u_k, v_k) \approx \mathbf{r}'_v(u_k, v_k)\Delta v$$

(kom ihåg att Δu och Δv är små). Ersätter vi $\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v_k)$ med $\mathbf{r}(u_k, v_k) + \mathbf{r}'_u(u_k, v_k)\Delta u$, $\mathbf{r}(u_k, v_k + \Delta v)$ med $\mathbf{r}(u_k, v_k) + \mathbf{r}'_v(u_k, v_k)\Delta v$ och gör samma sak med de övriga 2 hörnen, så har vi approximerat D_k med en parallellogram som på bilden högst uppe på sid. 143. Från algebrakursen vet vi att parallellogrammens area är lika med absolutbeloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} g'_u(u_k, v_k)\Delta u & g'_v(u_k, v_k)\Delta v \\ h'_u(u_k, v_k)\Delta u & h'_v(u_k, v_k)\Delta v \end{vmatrix} = J(u_k, v_k)\Delta u \Delta v.$$

Så $\mu(D_k) \approx |J(u_k, v_k)|\Delta u \Delta v = |J(u_k, v_k)|\mu(E_k)$. Detta ger

$$\sum_k f(x_k, y_k)\mu(D_k) \approx \sum_k f(g(u_k, v_k), h(u_k, v_k))|J(u_k, v_k)|\mu(E_k).$$

Eftersom vänster- och högerledet är Riemannsummor till $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ respektive $\iint_E f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|\, dudv$, så närmar de sig respektive integral då $\Delta u, \Delta v \to 0$. Detta troliggör formeln

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|\, dudv.$$

Observera att det är **mycket** viktigt att avbildningen är en bijektion (eventuellt med undantag för en nollmängd).

Det är ofta lättare att ange variabelbyte på formen $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$. I stället för att lösa ut x och y kan man ibland använda sambandet

$$J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}}.$$

Detta illustreras i exempel 16, avsnitt 6.4. Det gäller dock att övertyga sig om att man verkligen har en bijektion.

Dag 2

Avsnitt 6.6

Hela avsnittet fram till exempel 27 läses. Det viktigaste är att kunna beräkna generaliserade integraler och använda jämförelsekriteriet för att avgöra konvergens/divergens. Studera exempel 20-27 noga. Delavsnittet om integrand med växlande tecken läses översiktligt. Titta dock på exemplen.

Avsnitt 7.1

Läs fram till (och inklusive) exempel 1. Formel (4) (integration över nivåytor) utgår dock.

Avsnitt 1.4.5 (andragradsytorna)

Att känna igen ytorna underlättar när man skall göra sig en bild av det område man integrerar över. En minnesregel för hyperboloider: enmantad om ekvationen innehåller ett minustecken och tvåmantlad om det är två minustecken.

Dag 3

Avsnitt 7.1, forts.

Läs fortsättningen på avsnittet. Anmärkning på sid. 293 är mindre viktig och exempel 4 hoppas över. Ett speciellt viktigt variabelbyte är bytet till rymdpolära koordinater. Ett annat vanligt variabelbyte är bytet till polära koordinater i 2 av variablerna (t.ex. x och y) medan den tredje variabeln blir oförändrad. Detta kallas ibland för byte till cylindriska koordinater.

Avsnitt 7.2

Läses översiktligt. Försök dock förstå härledning av rekursionsformeln för volymen av det n-dimensionella enhetsklotet i exempel 7. Vissa förtydliganden finns i filen kompletteringar dag 3, se kurssidan.

Avsnitt 8.1

Studera alla exempel noga. Alternativa lösningar till exempel 2 och 3 finns i filen med kompletteringar. Observera också att där finns två formler som förenklar integration vid symmetrier.

Dag 4

Avsnitt 3.1.1

Läs fram till slutet av sid. 123 (exempel 2 översiktligt). Titta sedan på räknereglerna (5)-(8) (gärna med bevis). Vi kommer att behöva använda dem ett flertal gånger i fortsättningen.

Anmärkning

Integralen $\int_\gamma ds$ (se anmärkning på sid. 124) definieras som $\int_\alpha^\beta |r'(t)|\,dt$ och ger längden av kurvan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Mer generellt kan man definiera (kurv)integralen $\int_\gamma f(\mathbf{r})\,ds$ genom formeln

$$\int_\gamma f(\mathbf{r})\,ds = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt,$$

där $f(\mathbf{r})$ är en funktion av två variabler. En fysikalisk tolkning är att detta ger massa av en tunn böjd tråd med densitet $f(\mathbf{r})$ (den typen av integraler behandlas inte i boken).

Avsnitt 9.1

Kurvintegralen av ett vektorfält (som skiljer sig väsentligt från kurvintegralen av en funktion i anmärkningen ovan) definieras på sid. 328. Inledningen i början på avsnittet (inkl. exempel 1 och 2) ger en fysikalisk bakgrund till definitionen. Här och i fortsättningen gäller generellt att det viktiga är det matematiska innehållet men den fysikaliska bakgrunden underlättar förståelse. Allt från definitionen av kurvintegral och till och med första stycket på sid. 334 är viktigt. Resten av avsnittet läses översiktligt. De speciella vektorfälten **E** och **B** är mycket viktiga och vi kommer att återvända till dem vid flera tillfällen.

Dag 5

Avsnitt 9.2

Hela avsnittet läses. Det är viktigt att kunna härleda formel (9) - i boken sägs bara att härledningen liknar den för formel (8). I en av teorifrågorna skall man bevisa Greens sats. Ett fullständigt svar innebär att man kan härleda både (8) och (9), och att man även kan skissa hur formeln visas för mer generella områden (jfr. bilderna högst uppe på sid. 336).

Avsnitt 9.3

Avsnittet läses fram till mitten av sid. 342. Resten kan hoppas över.

Dag 6

Avsnitt 9.4

Läs allting fram till slutet av sid. 350. Exempel 13 kan hoppas över. Bevis för satserna 2 och 3 ingår i teorikraven. I sats 3 bör man också kunna genomföra beviset för att y-derivatan av U är lika med Q (i boken står bara att detta visas på samma sätt som att x-derivatan är lika med P).

Kommentar

I sista stycket på sid. 344 definieras begreppet exakt differentialform och i början av nästa sida hänvisas till avsnitt 2.7 som har hoppats över i Analys A. Terminologin exakt differentialform och skrivsättet $dU = Pdx + Qdy$ används ibland i boken **men betyder inget annat än att vektorfältet** (P, Q) **är ett potentialfält**.

Dag 7

Avsnitt 9.4, forts.

Läs allting fram till slutet av sid. 356. Exempel 17 hoppas över. Bevis för satserna 4 och 5 ingår i teorikraven. I det senare beviset skall man kunna förklara hur antagandet att Ω är enkelt sammanhängande används.

Avsnitt 8.1

Delavsnittet om kurvintegraler läses.

Kommentarer

Vektorfältet $\mathbf{B}$ uppfyller villkoret $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ och är därför konservativt i varje öppen sammanhängande delmängd av planet som inte innehåller origo. Däremot är inte $\mathbf{B}$ konservativt i hela sin definitionsmängd, se exempel 14, sid. 352. Om man integrerar Q m.a.p. y får man en potentialfunktion $U(x, y) = \arctan(y/x)$ som är väldefinierad i vart och ett av halvplanen $x > 0$ och $x < 0$. Observera att i halvplanet $x > 0$ är $U(x, y)$ lika med den polära vinkeln för (x, y) (i halvplanet $x < 0$ skiljer sig detta U från polära vinkeln med π).

I PB betecknas vektorfältet och rumsvariablerna med $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ medan det i övningsboken och i extraövningarna används beteckningar $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ och $\mathbf{r} = (x, y, z)$. **Mestadels kommer vi att använda de senare beteckningarna**.