Läsanvisningar till Analys B, HT 15

Del 2

Dag 8

Delavsnitt 1.4.5 och 3.1.2

Läs båda delavsnitten. En del är repetition.

Avsnitt 8.2

Resonemanget som troliggör formeln för area av en yta (formel (6), avsnitt 8.2) är mycket likt det som används för att förklara formeln för variabelbyte i dubbelintegraler. Se anmärkning nedan för mer detaljer. Studera exemplen (exempel 5 kan dock läsas översiktligt).

Avsnitt 10.1

Delavsnittet om ytintegraler läses. Det är viktigt att förstå vad som menas med orientering av en yta. Det är också viktigt att jobba sig igenom och förstå exemplen. Tänk igenom symmetriresonemanget i exempel 6 (formlerna på slutet av filen med kompletteringar till dag 3 på kurssidan kan vara till hjälp).

Anmärkningar

För att troliggöra formeln för area av en yta antar vi för enkelhets skull att D är en axelparallell rektangel. Ytans parameterframställning är $\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, $(s,t) \in D$. Som i härledningen av formeln för variabelbyte i dubbelintegraler delar vi in D i små axelparallella rektanglar, och rektangeln D_k har hörn i punkterna (s_k, t_k), $(s_k + \Delta s, t_k)$, $(s_k, t_k + \Delta t)$ och $(s_k + \Delta s, t_k + \Delta t)$, där Δs och Δt är små. Motsvarande del av ytan, kalla den Y_k, har ”hörn” i punkterna $\mathbf{r}(s_k, t_k)$, $\mathbf{r}(s_k + \Delta s, t_k)$, $\mathbf{r}(s_k, t_k + \Delta t)$ och $\mathbf{r}(s_k + \Delta s, t_k + \Delta t)$. Eftersom

$$\mathbf{r}(s_k + \Delta s, t_k) - \mathbf{r}(s_k, t_k) \approx \mathbf{r}'_s(s_k, t_k)\Delta s$$

och

$$\mathbf{r}(s_k, t_k + \Delta t) - \mathbf{r}(s_k, t_k) \approx \mathbf{r}'_t(s_k, t_k)\Delta t,$$

kan ytan approximeras med en parallellogram som spänns upp av vektorerna $\mathbf{r}'_s(s_k, t_k)\Delta s$ och $\mathbf{r}'_t(s_k, t_k)\Delta t$ (jfr. bilden på sid. 305). Parallellogrammens area är

$$|\mathbf{r}'_s(s_k, t_k) \times \mathbf{r}'_t(s_k, t_k)|\Delta s \Delta t,$$

så area av $Y_k \approx |\mathbf{r}'_s(s_k,t_k) \times \mathbf{r}'_t(s_k,t_k)|\Delta s \Delta t$. Det följer att

$$\text{area av } Y = \sum_k (\text{area av } Y_k) \approx \sum_k |\mathbf{r}'_s(s_k,t_k) \times \mathbf{r}'_t(s_k,t_k)|\Delta s \Delta t.$$

Högerledet är en Riemannsumma för integralen $\displaystyle\iint_D |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|\, dsdt$, så låter vi $\Delta s, \Delta t$ gå mot 0, får vi formel (6) i gränsvärdet.

Ytans area betecknas med symbolen $\iint_Y dS$ (se formel (6')). På liknande sätt som för kurvintegraler kan man här definiera dubbelintegralen $\iint_Y f(\mathbf{r})\, dS$ som $\iint_D f(\mathbf{r}(s,t))|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|\, dsdt$. Här är f en funktion av 3 variabler definierad på ytan. En fysikalisk tolkning är att integralen ger massa av en yta med densitet $f(\mathbf{r})$. Se exempel 9 där detta tillämpas.

På sid. 362 ges en fysikalisk tolkning av integralen (2) (som kallas flödesintegral). En något annorlunda tolkning är att en substans (gas, vätska) strömmar genom ytan, med hastigheten $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ är den komponent av hastighetsvektorn som är vinkelrät mot ytan. Integralen (som med våra beteckningar är $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$) ger den volym per tidsenhet av substansen som strömmar ut. Igen, det viktiga för oss är inte den bakomliggande fysiken (även om den underlättar förståelse), utan det matematiska innehållet.

Dag 9

Avsnitt 10.2

Det viktigaste här är Gauss sats och exempel 7, 8, 9. Bevis för Gauss sats ingår i teorikraven. Resonemanget i början på sid. 367 anknyter till delavsnittet om tvådimensionellt flöde i avsnitt 9.3. Detta är mindre viktigt och kan läsas översiktligt. Exempel 10 kan hoppas över (innehåller dock en intressant fysikalisk tillämpning - Arkimedes princip).

Anmärkningar

I bevis för Gauss sats i boken behandlas (med våra beteckningar) fallet med ett område på formen $\{(x,y,z) : \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$. Motsvarande komponent i vektorfältet är R. Det är viktigt att även arbeta sig igenom fallen med områden på formen $\{(x,y,z) : \alpha(x,z) \le y \le \beta(x,z)\}$ och $\{(x,y,z) : \gamma(y,z) \le x \le \delta(y,z)\}$ (som svarar mot komponenterna Q resp. P i vektorfältet).
Ett annat vanligt förekommande sätt att beteckna flödesintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$ är $\iint_Y P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy$. En förklaring till den senare beteckningen finns i EÖ, uppgift 37.

Dag 10

Avsnitt 10.3

Materialet på sidorna 375 och 376 är en inledning och kan läsas översiktligt. Delavsnittet om rotation är viktigt. Observera speciellt att rotationen beräknas med hjälp av en (formell) determinant och man behöver inte memorera formeln högst uppe på sidan 377. Stokes sats är mycket viktig. Den bevisas i boken bara för ett specialfall då ytan Y är en funktionsyta. Beviset ingår inte i teorikraven men det kan ändå vara värt att titta på resonemanget, utan att nödvändigtvis ta sig igenom alla räkningar. Delavsnittet om betydelsen av rotationen kan läsas översiktligt fram till exempel 14. Den kanske mest åskådliga tolkningen av rotationens innebörd finns i mitten på sid. 384. Exempel 14 (fram till slutet av avsnittet) är viktigt.

Avsnitt 10.4

Det är viktigt att förstå de beteckningar som använder sig av nabla-symbolen. Exempel 15, 16 och 17 är viktiga, exempel 18 läses översiktligt.

Avsnitt 10.5

Hela avsnittet är viktigt. Studera alla exempel. Sats 3 inklusive bevis och sats 4 inklusive det skissartade beviset som finns i boken ingår i teorikraven. I bevis för sats 3 behöver man räkna ut rotationen av gradienten av U för att visa att den är lika med nollvektorn, och i bevis för sats 4 skall man kunna förklara hur antagandet att Ω är enkelt sammanhängande används. Observera att ett vektorfält $\mathbf{F}$ av klass C^1 i en öppen mängd Ω i det tredimensionella rummet är ett potentialfält där om och endast om $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i Ω. Beviset är nästan identiskt med motsvarande bevis i planet.

Anmärkningar

Med våra beteckningar är den formella determinanten för rotationen

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

I samband med Stokes sats definieras i boken ett orienterat ytstycke Y med orienterad rand ∂Y genom villkoret att vektorprodukten av normalvektorn till ytan och tangentvektorn till kurvan i omloppsriktningen pekar in mot ytan. Ett annat, mer vardagligt, sätt att uttrycka detta är: om man går längs randen i

omloppsriktningen och har huvudet i samma riktning som normalvektorn, så befinner sig ytan direkt till vänster.
Stokes sats är en generalisering av Greens sats. Det ser man på följande sätt: Betrakta xy-planet som ett delrum av det tredimensionella rummet. Om ytan är en del av xy-planet och vektorfältet är $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y), 0)$, så är $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)$, $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ och $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$. Alltså blir kurv- resp. ytintegralen desamma som i Greens sats.

Dag 11

K, avsnitt 2-4

Hela materialet är viktigt. Bevis för sats 3.1 och för sats 4.1 ingår i teorikraven. Det är viktigt att förstå innebörden av sats 3.2 och följdsats 3.1 även om deras bevis inte finns med bland teorikraven.

Dag 12

K, avsnitt 5

Exempel 5.1 och sats 5.1 är viktigast. Även exempel 5.2 bör läsas, fast mer översiktligt.

K, avsnitt 6

Hela avsnittet bör läsas och det är viktigt att förstå (och kunna förklara) skillnaden mellan punktvis konvergens och likformig konvergens. Studera alla exempel noga. Bevis för sats 6.2 ingår i teorikraven. Även bevis för satserna 6.1, 6.3, 6.4 bör läsas, åtminstone översiktligt.

Anmärkning

Begreppen punktvis och likformig konvergens införs i definition 6.1. För att avgöra om en följd är likformigt konvergent eller ej använder man oftast kriteriet i del (ii) av definitionen. Men det finns en annan, ekvivalent, definition som inte är lika lätt att använda för att i praktiken avgöra likformig konvergens men som har fördelen av att bättre förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens. Se anmärkning 6.1 och de 2 efterföljande stycken.

Dag 13

K, avsnitt 7

Hela avsnittet läses, dock kan andra delen av exempel 7.1 (dvs. bevis för att konvergensen inte är likformig då $a = 0$) läsas översiktligt. Bevis för sats 7.1 ingår i teorikraven men även bevis för satserna 7.2, 7.3, 7.4 bör läsas.

K, avsnitt 8

Hela avsnittet är viktigt och bör läsas noga. Lägg speciellt märke till att potensserier kan deriveras och integreras termvis och att summan alltid är en oändligt många gånger deriverbar funktion innanför konvergensradien. Bevis för sats 8.1 (egentligen för del (ii) av satsen) ingår i teorikraven.

Dag 14

K, avsnitt 9

Sats 9.1 följer direkt ur resultat i avsnitt 8. Sats 9.2 och följdsats 9.1 innehåller viktiga resultat, men bevis för sats 9.2 kan läsas översiktligt. Sats 9.3 är viktig. Observera en viktig konsekvensen av den sistnämnda satsen: en analytisk funktion är **alltid** oändligt många gånger deriverbar. Det här är en speciell egenskap hos analytiska funktioner som inte har någon motsvarighet för reellvärda funktioner.

K, avsnitt 10

Avsnittet kan hoppas över men är värt att läsa eftersom det innehåller en intressant tillämpning av potensserier.