

Matematik II, Matematisk Analys del B
Bonusuppgifter omgång 5

Lämnas in 14 december

1. Låt $\mathbf{F} = \left(2x + z, x + 2y + \frac{2ye^z}{1 + y^2}, x + 2z + e^z \ln(1 + y^2) \right)$ och låt γ vara skärningen mellan ytan $z = x^2 + y^2$ och planet $z = x + y$, orienterad moturs uppifrån sett. Beräkna $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
2. Låt γ vara skärningen mellan ytorna $x = yz$ och $4y^2 + z^2 = 1$, orienterad moturs sett från punkten $(10, 0, 0)$. Beräkna $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (x^4 + y^2, y^4 + z^2, z^4 + x^2)$.
3. Låt $\mathbf{F} = (z^2, 8x^2, y^2)$. Bestäm ett plan $z = ax + by$ sådant att $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje enkel sluten kurva γ som ligger i planet.
4. Undersök om följande funktioner är analytiska: a) $f(x, y) = 2x - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2y)$, b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos xy + i e^{x^2 - y^2} \sin xy$. Är de analytiska, så skriv dem som funktioner av z (t.ex. om $f(x, y) = -y + ix$, så är $f(z) = iz$).
Ledning: Lös ut x och y ur sambanden $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Om f är analytisk, så sätt in detta i $f(x, y)$. Resultatet skall innehålla z men ej \bar{z} . (Det går även att gissa $f(z)$. Gör du det, så verifiera att gissningen är korrekt.)
5. Beräkna $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^3 + 9z}$ och $\int_{\Gamma} \frac{(z + 1) dz}{z^3 + 9z}$ i följande två fall:
 - a) Γ är randen till fyrhörningen med hörn i punkterna $-1, 1, 4i, -i$, orienterad moturs.
 - b) Γ är randen till fyrhörningen med hörn i punkterna $-1, 1, 4i, -4i$, orienterad moturs.