MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd matematik

Tentamen i MM4000 Utvalda teman i matematik för lärare
Måndag den 15 augusti 2016
Examinator: Torbjörn Tambour

Lösningar, svar och kommentarer

1. Bevisa att vinkelsumman i en triangel är 180 grader. Vilka satser stöder du dig på?

Kommentar: Se kompendiet. Beviset använder satsen om alternatvinklar vid parallella linjer, som i sin tur bygger på parallellaxiomet.

2. Bestäm alla heltal x sådana att

$$\begin{cases} x & \equiv & 3 & \mod & 5 \\ x & \equiv & -2 & \mod & 12 \\ x & \equiv & 7 & \mod & 11 \end{cases}$$

Lösning: Vi använder kinesiska restsatsen. Med samma beteckningar som i aritmetikhäftet är $M = 660$, $M_1 = 132$, $M_2 = 55$ och $M_3 = 60$. Kongruenserna

$$\begin{cases} M_1E_1 & \equiv & 1 & \mod & 5 \\ M_2E_2 & \equiv & 1 & \mod & 12 \\ M_3E_3 & \equiv & 1 & \mod & 11 \end{cases}$$

har en lösning $E_1 = 3$, $E_2 = 7$, $E_3 = -2$, så en lösning till systemet ovan är

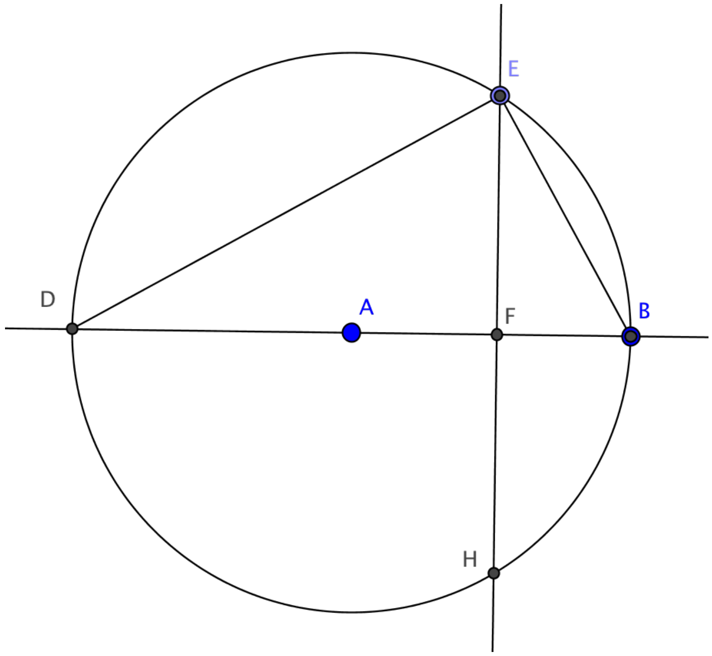
$$x_0 = 3 \cdot 3 \cdot 132 + (-2) \cdot 7 \cdot 55 + 7 \cdot (-2) \cdot 60 = -422.$$

Alla lösningar ges av $x = -422 + 660n$, där $n \in \mathbf{Z}$. Man kan också skriva lösningarna som $x = 238 + 660m$, där $m \in \mathbf{Z}$.

3. Givet är två sträckor med längder a och b. Visa hur man med passare och linjal kan kontruera en sträcka med längd $\sqrt{ab}$. Bevisa att konstruktionen är riktig och ange noga vilka satser du stöder dig på. Hur följer det av konstruktionen att

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}\ ?$$

Lösning: I figuren nedan är $|DF| = a$ och $|FB| = b$ och DB är en diameter i cirkeln. Linjen EF är normal till DB och E är skärningspunkten med cirkeln. Då är längden av FE lika med $\sqrt{ab}$.



För att visa detta ska vi bevisa att $\triangle DEF \sim \triangle EBF$. Till att börja med är $\wedge DEB$ rät, eftersom den är periferivinkel på diametern DB, så att motsvarande medelpunktsvinkel är 180 grader. Vi får $\wedge EDF = 90^\circ - \wedge DEF = \wedge BEF$ och då båda trianglarna är rätvinkliga, så ger likformighetsfallet VVV att de är likformiga. Alltså är

$$\frac{|DF|}{|FE|} = \frac{|FE|}{|BF|}$$

varför

$$|FE|^2 = |DF| \cdot |BF| = ab.$$

En alternativ lösning använder första fallet av kordasatsen:

$$ab = |DF| \cdot |BF| = |FE| \cdot |FH| = |FE|^2.$$

Sträckan FE är kortare än radien (eller lika lång som radien om $a = b$) och då radien är lika med $(a+b)/2$, så följer att $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$.

4. Vilka rationella tal har avslutade decimalutvecklingar? Bevisa ditt påstående.

Kommentar: Se aritmetikhäftet.

5. Låt x_1, x_2, x_3 vara rötterna till ekvationen $x^3 + x + 1 = 0$. Bestäm den tredjegradsekvation som har rötterna x_1^2, x_2^2, x_3^2.

Lösning: Den sökta ekvationen är

$$(x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2) = 0$$

det vill säga

$$x^3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)x^2+(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)x-x_1^2x_2^2x_3^2=0.$$

Koefficienterna här kan vi beräkna med hjälp av sambanden mellan rötter och koefficienter. Vi har

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= 1 \\ x_1x_2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Alltså är

$$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3),$$

varför

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-2.$$

Vidare är

$$\begin{aligned} (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2 &= x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2 \\ &+ 2(x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2) \\ &= x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_2), \end{aligned}$$

varav

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=1.$$

Slutligen är

$$x_1^2x_2^2x_3^2=1,$$

så den sökta ekvationen är

$$x^3+2x^2+x-1=0.$$

Ett annat sätt är att först beräkna produkten $(t^2-x_1^2)(t^2-x_2^2)(t^2-x_3^2)$. Om vi sätter $p(x)=x^3+x+1$, så är

$$\begin{aligned} & (t^2-x_1^2)(t^2-x_2^2)(t^2-x_3^2) \\ = & (t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)(t+x_1)(t+x_2)(t+x_3) \\ = & -(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)(-t-x_1)(-t-x_2)(-t-x_3) \\ = & -p(t)p(-t) \\ = & -(t^3+t+1)((-t)^3+(-t)+1) \\ = & (t^3+t+1)(t^3+t-1) \\ = & t^6+2t^4+t^2-1 \end{aligned}$$

och vi får igen att

$$(x-x_1^2)(x-x_2^2)(x-x_3^2)=x^3+2x^2+x-1.$$

6. Hur definieras diskriminanten till ett andragradspolynom? Uttryck diskriminanten i polynomets koefficienter. Vilken betydelse har diskriminanten för polynomets nollställen? Illustera med exempel och bevisa dina påståenden.

Kommentar: Se algebrakompendiet.

Uppgifterna är värda högst 6 poäng per styck. Betygskriterier: För E krävs 18 p, för C krävs 27 p och för A krävs 35 p.

Skrivningsåterlämning äger rum torsdagen den 18 augusti kl 13.00-13.30 i Torbjörns tjänsterum 328, hus 6, Kräftriket. Du kan också mejla torbjorn@math.su.se för skrivningsresultatet.